

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Етински Едвард Габријел

ИНВАРИЈАНТНЕ КОНТАКТНЕ
СТРУКТУРЕ НА S^1 —РАСЛОЈЕЊИМА НАД
ПОВРШИМА

мастер рад

Београд, 2026.

Ментор:

проф. др Александра МАРИНКОВИЋ, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Дарко МИЛИНКОВИЋ, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Јована НИКОЛИЋ, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: _____

Човек је склон исцртавању себе и онога шта он јесте и шта треба бити чиме самог себе дефинише. Поставља се природно питање о постојању објеката којима барамо и који су око нас, како у општем свету тако и у конструисаном. Једне чудне летње ноћи набасао сам на усамљеног младића који је седео иза цркве гледајући испред себе скоро празним погледом који се чинио хладним, одсутним, али нагасе суморним. Пришао сам му и питао о чему размишља, на шта ме је само погледао немо, сузим очима пуним бола. Тада сам на тренутак у дубини океана видео карактеристичан трачак светлости који је продро до мене. Поседео сам са њим и његовим фламингом и надам се да ћемо се поново видети. Надам се да ће се насмејати када види овај рад који овим путем посвећујем звездама у које гледа. Хвала вам.

Наслов мастер рада: Инваријантне контактне структуре на S^1 –раслојењима над површима

Резиме: У овом раду ћемо систематично изнети и допунити део техничких детаља рада Роберта Луца у којем посматра контактне структуре на 3–многострукостима које можемо видети као тотални простор неког S^1 главног раслојења $\pi : E \rightarrow M$ над оријентабилном површи. Најпре доказујемо егзистенцију S^1 инваријантних контактних структура за дат скуп кружница Σ у базној површи M изнад којих се функција $\alpha(X)$ анулира, где је X векторско поље индуковано S^1 дејством. Потом показујемо да уоченом конструкцијом можемо добити све S^1 инваријантне контактне форме на E , као и да постоји локални модел уочених инваријантних контактних форми у околини скупа $\pi^{-1}(\Sigma)$. Потом показујемо да у свакој хомотопској класи инваријантних глатких поља равни на E постоје две фамилије инваријантних контактних структура генерисаних формама супротне оријентације. За крај описујемо затегнутост и заврнутост неких Луцових контактних структура.

Кључне речи: контактна геометрија, S^1 –главна раслојења, 3–многострукости, заврнуте контактне структуре

Садржај

1	Уводни појмови и примери	1
1.1	Контактна геометрија	1
1.2	Главна раслојења	8
1.3	Инваријантне контактне форме	13
1.4	Дефиниција скупа Σ и примери инваријантних контактних структура	15
2	Конструкција инваријантних контактних форми	25
2.1	Бутби-Ванг теорема и случај $\Sigma = \emptyset$	25
2.2	Случај $\Sigma \neq \emptyset$ -Луцова конструкција	29
3	Еквиваријантна класификација	36
3.1	Појам еквиваријантне контактоморфности	36
3.2	Формулација и доказ теореме 3.2.1	41
4	Богатство Луцових контактних структура	56
4.1	Преглед резултата и скица плана	56
4.2	Поставка и конструкција базе инваријантних форми	58
4.3	Доказ теореме 4.1.1	60
5	Класификација одређених Луцових контактних структура	71
5.1	Мотивација	71
5.2	Примери заврнутих и затегнутих Луцових структура	74
5.3	Отворена питања	78
	Библиографија	79

Глава 1

Уводни појмови и примери

1.1 Контактна геометрија

Дефиниција 1.1.1. Нека је E глатка многострукост непарне димензије и $\xi \subseteq TE$ глатка дистрибуција кодимензије 1. Уређени пар (E, ξ) је контактна многострукост уколико за сваку тачку $p \in E$ постоји отворена околина $p \in U$ и диференцијална 1–форма $\alpha \in \Omega^1(E)$ таква да на U важи

1. $\ker \alpha = \xi$ на U ,
2. $d\alpha|_{\xi}$ је недегенерисана односно симплектичка.

Уколико постоји диференцијална 1–форма $\alpha \in \Omega^1(E)$ која глобално задаје контактну структуру на E , тада за E кажемо да је *кооријентабилна* и саму контактну многострукост ћемо означавати са $(E, \ker \alpha)$ у том случају. Подразумеваћемо да су све контактне многострукости које разматрамо кооријентабилне сем уколико није наглашено супротно.

Дефиниција 1.1.2. Нека је M глатка многострукост и $\omega \in \Omega^2(M)$ произволна 2–форма. Ранг диференцијалне форме ω у тачки $p \in M$ се дефинише као ранг линеарног пресликавања

$$T_p M \rightarrow T_p^* M : X_p \mapsto \iota_{X_p} \omega.$$

У свакој тачки $p \in E$ контактне многострукости $(E, \ker \alpha)$ видимо да важи да је $\ker \alpha_p \cap \ker d\alpha_p = \{0\}$ што следи на основу недегенерисаности форме $d\alpha$ на $\ker \alpha$. На основу недегенерисаности $d\alpha$ на $\ker \alpha$ додатно имамо да је језгро пресликавања $d\alpha_p : T_p E \rightarrow T_p^* E$ једнодимензионално.

Самим тим, са унапред изабрану метрику на E добијамо да је $T_p E = \ker \alpha_p \oplus \ker d\alpha_p$, као и да је $\dim \ker \alpha = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, те видимо да кооријентабилна контактна многострукост мора бити непарне димензије. Видимо да претпоставка кооријентабилности није била неопходна да бисмо закључили да је димензија непарна јер је аргумент био изнесен у тачки $p \in E$, те видимо да је свака контактна многострукост непарне димензије, и да је услов у дефиницији на почетку сувишан.

Пример 1. Нека је дата многострукост $\mathbb{R}^{2n+1}$ са координатама $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$. Тада је $(\mathbb{R}^{2n+1}, \ker \alpha_{\text{std}})$ контактна многострукост, где је $\alpha_{\text{std}} \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n+1})$ дата са

$$\alpha_{\text{std}} = dz + \sum_{i=1}^n x_i \cdot dy_i.$$

Директним рачуном добијамо да је

$$\alpha_{\text{std}} \wedge (d\alpha_{\text{std}})^{\wedge n} = dz \wedge dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n \neq 0.$$

Уочену контактну структуру ћемо звати *стандардном контактном структуром* на $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Пример 2. Свака 3–многострукост допушта контактну структуру [9]. У димензији 5 постоје многострукости које не допуштају контактну структуру, пример је $SU(3)/SO(3)$ [14]. Са друге стране, Гајгес у свом раду [3] показује да уколико је M просто повезана, тада она допушта контактну структуру. У димензијама $2n+1$, $n > 2$ многострукости $SU(3)/SO(3) \times S^{2n-4}$ не допуштају контактну структуру [14].

Како разматрамо глатке многострукости са додатном контактном структуром, желимо да посматрамо пресликавања која ће поштовати ту додатну структуру, те са тим у вези уводимо наредну дефиницију.

Дефиниција 1.1.3. Нека су (E_1, ξ_1) и (E_2, ξ_2) две контактне многострукости. Кажемо да је пресликавање $f : E_1 \rightarrow E_2$ *контактоморфизам* уколико важи да је $f_* \xi_1 = \xi_2$.

Лема 1.1.4. Нека су $(E, \ker \alpha_1)$ и $(E, \ker \alpha_2)$ две контактне многострукости. Тада су $(E, \ker \alpha_1)$ и $(E, \ker \alpha_2)$ *контактоморфне* посредством дифеоморфизма $f : E \rightarrow E$ ако и само ако постоји глатка функција $\mu \in C^\infty(E)$ која је нешчежавајућа на E и важи $f^* \alpha_2 = \mu \cdot \alpha_1$.

Поред појма контактоморфизма за кооријентабилне контактне многострукости имамо и појам *сиројот конџакџоморфизма* где захтевамо додатно да је $f^*\alpha_1 = \alpha_0$.

Доказ. ($\Rightarrow$) Покажимо најпре да је $\ker \alpha_1 = \ker f^*\alpha_2$. По претпоставци имамо да важи $f_* \ker \alpha_1 = \ker \alpha_2$. Нека је $X \in \ker \alpha_1$. Тада имамо да важи

$$\alpha_2(f_*X) = (f^*\alpha_2)(X) = 0,$$

те $X \in \ker f^*\alpha_2$. Уколико $X \in \ker f^*\alpha_2$, тада имамо да важи

$$(f^*\alpha_2)(X) = \alpha_2(f_*X) = 0,$$

те на основу претпоставке $f_* \ker \alpha_1 = \ker \alpha_2$ имамо да је $f_*X \in f_* \ker \alpha_1$. Како је $f : E \rightarrow E$ дифеоморфизам, то је специјално f_* инјективно, те важи да је $X \in \ker \alpha_1$. Дакле заиста имамо да је $\ker \alpha_1 = \ker f^*\alpha_2$.

Како је f дифеоморфизам, то имамо да је и форма $f^*\alpha_2$ контактна и специјално нешчезавајућа форма. Нека је $p \in E$ произвољно и $X_p \in (\ker_p \alpha_1)^C = (\ker f^*\alpha_2)^C$. Тада имамо да је добро дефинисан скалар $\mu_p = \frac{f^*\alpha_2(X_p)}{\alpha_1(X_p)}$.

За ковектор $\mu_p \cdot \alpha_1 - f^*\alpha_2$ видимо да је идентички нула на T_pE , те стога важи једнакост $(f^*\alpha_2)_p = \mu_p \cdot (\alpha_1)_p$.

Дефинишимо функцију $\mu : E \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto \mu_p$. Приметимо да како су форме α_1 и $f^*\alpha_2$ нигде ишчезавајуће, то ни пресликавање μ не може узимати вредност нула. Како важи да је $f^*\alpha_2 = \mu \cdot \alpha_1$ тачка по тачка и како су форме $f^*\alpha_2$ и α_1 глатке, то следи да је и функција μ глатка.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да радимо у произвољној тачки $p \in E$. Како је $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}$ нигде ишчезавајућа функција, то имамо да је $\ker \alpha_1 = \ker f^*\alpha_2$. Желимо да покажемо да је $f_* \ker \alpha_1 \subseteq \ker \alpha_2$. Нека је $X \in \ker \alpha_1$ произвољно. Тада имамо да важи $f_*X \in \ker \alpha_2$ па стога на основу претпоставке $f^*\alpha_2 = \mu \cdot \alpha_1$ имамо да је

$$0 = \alpha_2(f_*X) = f^*\alpha_2(X) = \mu \cdot \alpha_1(X),$$

те како је по претпоставци μ нигде ишчезавајућа функција, то важи да је $X \in \ker \alpha_1$. Показали смо дакле да важи $f_* \ker \alpha_1 \subseteq \ker \alpha_2$.

Желимо још да покажемо обратну инклузију. Нека је $X \in \ker \alpha_2$. Како је пресликавање $f : E \rightarrow E$ дифеоморфизам, то је вектор $f_*^{-1}X$ добро дефинисан и за њега имамо да важи

$$0 = \alpha_2(X) = \alpha_2(f_*f_*^{-1}X) = f^*\alpha_2(f_*^{-1}X) = \mu \cdot \alpha_1(f_*^{-1}X).$$

Како је функција μ нешчезавајућа, то добијамо да је $\alpha_1(f_*^{-1}X) = 0$, те самим тим и да је $f_*^{-1}X \in \ker \alpha_1$. Како је $f_* \circ (f_*^{-1}X) = X$, то добијамо да важи $\ker \alpha_2 \subseteq f_* \ker \alpha_1$.

Заједно са претходним добијамо да је $f_* \ker \alpha_1 = \ker \alpha_2$. С обзиром на произвољност тачке $p \in E$ коју смо фиксирали на почетку добијамо да су α_1 и α_2 контактоморфне. $\square$

Пример 3. Нека је дата стандардна контактна форма на $\mathbb{R}^3$ са координатама (x, y, z) у облику $\alpha_{\text{std}} = z + x \cdot dy$. Тада за пресликавање

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (\sqrt{2}x, \sqrt{2}y, z - xy)$$

важи да је $f \in \text{Diff}(\mathbb{R}^3)$ и $f^*\alpha_{\text{std}} = z + x \cdot dy - y \cdot dx$. Видимо да је ово један строги контактоморфизам између форми α_{std} и $z + x \cdot dy - y \cdot dx$. За формулу $z + x \cdot dy - y \cdot dx$ ћемо такође сматрати да је стандардна на $\mathbb{R}^3$.

Пример 4. Уколико у претходном примеру не скалирамо x и y координате, добијамо да је пресликавање

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x, y, z - xy)$$

такође дифеоморфизам од $\mathbb{R}^3$, али ће важити да је $\tilde{f}^*\alpha_{\text{std}} = \frac{1}{2}(z + x \cdot dy - y \cdot dx)$, те је $\tilde{f}$ пример контактоморфизма између форми α_{std} и $z + x \cdot dy - y \cdot dx$ који није строг.

Теорема 1.1.5. *Нека је $(E, \ker \alpha)$ контактна многострукост. Тада постоји јединствено векторско поље $R_\alpha \in \mathfrak{X}(E)$ такво да важи:*

1. $\alpha(R_\alpha) = 1$,
2. $\mathcal{L}_{R_\alpha}\alpha = \iota_{R_\alpha}d\alpha = 0$.

Доказ. За сваку тачку $p \in E$ је $d\alpha|_{T_p E}$ кососиметрична форма максималног ранга на основу чињенице да је $d\alpha$ симплектичка. Самим тим, на основу непарности димензије имамо да је њен ранг $2n$, па имамо да је језгро $\ker d\alpha$ једnodимензионално. Како важи да је $\ker \alpha \cap \ker d\alpha = \emptyset$ на основу контакт-ног услова $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$, то имамо да за векторско поље за које важи да је $\iota_{R_\alpha}(d\alpha) = 0$ вредност израза $\alpha(R_\alpha) \neq 0$. Први услов ће нормирати ово векторско поље. $\square$

Јединствено векторско поље из претходне теореме ћемо називати *Ребовим векторским пољем контактне форме* α . Приметимо да уколико имамо две контактноморфне контактне форме α_0 и α_1 на E , односно постоји $\mu \in C^\infty(E)$ такво да важи $f^*\alpha_1 = \mu \cdot \alpha_0$ имамо да $\iota_{f_*R_{\alpha_0}} d\alpha_1 = -(f_*R_{\alpha_0})(\mu) \cdot \alpha_0$, за шта *a priori* не знамо да се анулира, те самим тим видимо да је динамика Ребовог векторског поља везана не само за контактну структуру, већ и за контактну форму која је задаје.

Лема 1.1.6. *Нека су даће $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^1(E)$ контактне форме на E . α_1 и α_2 су контактоморфне ако и само ако постоји дифеоморфизам $f : E \rightarrow E$ такав да важи*

$$f^*\alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0.$$

Доказ. ($\Rightarrow$) Видимо на основу дефиниције клинастог производа да ће у произвољној тачки многострукости важити да је

$$f^*\alpha_1 \wedge \alpha_2(X_p, Y_p) = \alpha_1(f_*X_p)\alpha_2(Y_p) - \alpha_1(f_*Y_p)\alpha_2(X_p) = 0$$

односно да важи

$$\alpha_1(f_*X_p)\alpha_2(Y_p) = \alpha_1(f_*Y_p)\alpha_2(X_p) = 0$$

за произвољне векторе $X_p, Y_p \in T_pE$.

Уколико одаберемо $Y_p \in \ker_p \alpha_2$ и $X_p \in (\ker_p \alpha_1)^C$ које постоји јер је α_1 контактна форма, то видимо да мора да важи $f_*(Y_p) \in \ker \alpha_1$, што значи да важи

$$\ker_p \alpha_2 \subseteq \ker_{f(p)} \alpha_1 = \ker_p f^*\alpha_1.$$

Потпуно аналогним поступком добијамо и обратну инклузију, те важи да је $\ker_p \alpha_2 = \ker_p f^*\alpha_1$ за свако $p \in E$, па важи и $\ker \alpha_2 = \ker f^*\alpha_1$. На основу претходног имамо да постоји глатка функција $\mu : E \rightarrow E$ таква да важи $f^*\alpha_1 = \mu \cdot \alpha_2$, што је и требало доказати.

($\Leftarrow$) Како важи да је $f^*\alpha_1 = \mu \cdot \alpha_2$ за неко $\mu \in C^\infty(E)$ то имамо да је $f^*\alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$. $\square$

Наредну теорему наводимо без доказа, а њен доказ се може наћи у [4].

Теорема 1.1.7. *(Грејева стабилност) Нека је $\{\xi_t\}_{t \in [0,1]}$ тачка фамилија контактних структура на затвореној многострукости M . Тада постоји изотопија $\{\psi_t\}_{t \in [0,1]}$ на M таква да*

$$d\psi_t(\xi_0) = \xi_t \text{ за свако } t \in [0, 1].$$

Уколико је свака ξ_t задата глобално 1-формом α_t , претходни израз је еквивалентан томе да са свако $t \in [0, 1]$ постоји латка функција $\lambda_t : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ таква да важи

$$\psi_t^* \alpha_t = \lambda_t \alpha_0.$$

Дефиниција 1.1.8. Нека је M затворена (компактна и бес границе) многострукост димензије n . Фиксирајмо коначан атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^N$ и компакте $K_i \subseteq U_i$ такве да је $\bigcup_{i=1}^N K_i = M$. За $\alpha \in \Omega^k(M)$ означимо са a_I^i координатне функције форме α у карти φ_i , тј.

$$(\varphi_i^{-1})^* \alpha = \sum_I a_I^i dx^I, \quad I = (i_1 < \dots < i_k), \quad dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Тада дефинишемо следеће норме

$$\|\alpha\|_{C^0} = \max_{i,I} \max_{\varphi_i(K_i)} |a_I^i|, \quad \|\alpha\|_{C^1} = \|\alpha\|_{C^0} + \max_{i,I,j} \max_{\varphi_i(K_i)} \left| \frac{\partial a_I^i}{\partial x^j} \right|.$$

Може се показати да ова дефиниција добра, односно да свака затворена многострукост допушта коначни атлас са траженим својством, као и да неовисно о избору коначног атласа и низа компакта све горе дефинисане C^1 норме задају исту топологију на простору $\Omega^k(M)$, но то премашује оквири овог рада. За детаље видети [5].

Дефиниција 1.1.9. Топологију индуковану било којом од претходних C^1 норми ћемо називати јаком Витнијевом C^1 топологијом на простору $\Omega^k(M)$.

Став 1.1.10. Нека је α_0 контактна форма на затвореној 3-многострукости E . Тада за фиксирану C^1 норму на $\Omega^1(E)$ постоји $\varepsilon > 0$ такво да за произвољно $\alpha_1 \in \Omega^1(E)$ важи

$$\|\alpha_0 - \alpha_1\|_{C^1} < \varepsilon \implies \alpha_1 \text{ је контактна форма.}$$

Доказ. Фиксирајмо C^1 норму на $\Omega^1(E)$ одређену коначним атласом $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^N$ и компактима $K_i \subseteq U_i$, $\{K_i\}_{i=1}^N$, $\bigcup_{i=1}^N K_i = E$.

У карти (U_i, φ_i) , $i \in \{1, \dots, N\}$, ће форма α_0 имати запис

$$\alpha_0 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3.$$

Директним рачуном добијамо да је

$$d\alpha_0 = df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 + df_3 \wedge dx_3,$$

као и да је

$$\alpha_0 \wedge d\alpha_0 = \left(\sum_{\pi \in \text{Sym}(3)} \text{sgn } \pi \cdot f_{\pi(1)} \partial_{x_{\pi(2)}} f_{\pi(3)} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

где су са $\text{Sym}(3)$ означене пермутације скупа $\{1, 2, 3\}$.

Нека је $K_i \subseteq U_i$. Како је $\varphi_i(K_i)$ компактан и α_0 контактна, то видимо да је

$$\min_{\varphi_i(K_i)} \left| \sum_{\pi \in \text{Sym}(3)} \text{sgn } \pi \cdot f_{\pi(1)} \partial_{x_{\pi(2)}} f_{\pi(3)} \right| = m \in (0, +\infty).$$

Нека је сада $\alpha_1 \in \Omega^1(E)$ произвољна диференцијална форма. Тада у склопу карте (U_i, φ_i) форму α_1 можемо записати као

$$\alpha_1 = \bar{f}_1 dx_1 + \bar{f}_2 dx_2 + \bar{f}_3 dx_3$$

и директним рачуном добијамо да је

$$\alpha_1 \wedge d\alpha_1 = \left(\sum_{\pi \in \text{Sym}(3)} \text{sgn } \pi \cdot \bar{f}_{\pi(1)} \partial_{x_{\pi(2)}} \bar{f}_{\pi(3)} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Желимо да пронађемо $\varepsilon > 0$ довољно мало такво да је

$$\left| \sum_{\pi \in \text{Sym}(3)} \text{sgn } \pi \cdot \bar{f}_{\pi(1)} \partial_{x_{\pi(2)}} \bar{f}_{\pi(3)} \right| > 0 \quad \text{на } \varphi_i(K_i).$$

Уочимо да на $\varphi_i(K_i)$ важи

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\pi \in \text{Sym}(3)} \text{sgn } \pi \cdot \bar{f}_{\pi(1)} \partial_{x_{\pi(2)}} \bar{f}_{\pi(3)} \right| \\ & \geq \left| \sum_{\pi \in \text{Sym}(3)} \text{sgn } \pi \cdot f_{\pi(1)} \partial_{x_{\pi(2)}} f_{\pi(3)} \right| \\ & \quad - 3! \max_{\pi \in \text{Sym}(3)} \max_{\varphi_i(K_i)} |f_{\pi(1)} \partial_{x_{\pi(2)}} f_{\pi(3)} - \bar{f}_{\pi(1)} \partial_{x_{\pi(2)}} \bar{f}_{\pi(3)}|, \end{aligned}$$

те желимо још да оценимо разлику

$$|f_i \partial_{x_j} f_k - \bar{f}_i \partial_{x_j} \bar{f}_k|.$$

На $\varphi_i(K_i)$ имамо да је

$$|f_i \partial_{x_j} f_k - \bar{f}_i \partial_{x_j} \bar{f}_k| \leq \|\alpha_1 - \alpha_0\|_{C^1} (2\|\alpha_0\|_{C^1} + \|\alpha_1 - \alpha_0\|_{C^1}),$$

те узимањем максимума по $\varphi_i(K_i)$ добијамо да је

$$\max_{\varphi_i(K_i)} |f_i \partial_{x_j} f_k - \bar{f}_i \partial_{x_j} \bar{f}_k| \leq \|\alpha_1 - \alpha_0\|_{C^1} (2\|\alpha_0\|_{C^1} + \|\alpha_1 - \alpha_0\|_{C^1}).$$

Заједно са претходним добијамо да је на $\varphi_i(K_i)$

$$\left| \sum_{\pi \in \text{Sym}(3)} \text{sgn } \pi \cdot \bar{f}_{\pi(1)} \partial_{x_{\pi(2)}} \bar{f}_{\pi(3)} \right| \geq m - 3! \cdot \|\alpha_1 - \alpha_0\|_{C^1} (2\|\alpha_0\|_{C^1} + \|\alpha_1 - \alpha_0\|_{C^1}).$$

Нека је сада $\|\alpha_1 - \alpha_0\|_{C^1} < \varepsilon$. Видимо да можемо узети $\varepsilon > 0$ довољно мало такво да је

$$\left| \sum_{\pi \in \text{Sym}(3)} \text{sgn } \pi \cdot \bar{f}_{\pi(1)} \partial_{x_{\pi(2)}} \bar{f}_{\pi(3)} \right| > 0$$

на $\varphi_i(K_i)$. Како компактних K_i има коначно много и важи $\bigcup_{i=1}^N K_i = E$, то можемо узети $\varepsilon > 0$ довољно мало да на сваком $\varphi_i(K_i)$ важи претходна оцена, одакле видимо да је за сваку тачку $p \in E$ форма α_1 контактна, што је и требало доказати. $\square$

Став 1.1.11. Нека су α_0 и α_1 контактне форме на затвореној 3-многоштрукости E које су C^1 близу. Тада је за свако $t \in [0, 1]$ форма

$$\alpha_t = (1 - t) \cdot \alpha_0 + t \cdot \alpha_1$$

контактна.

Доказ. Уочимо да за ε добијено из претходног става добијамо да је

$$\|\alpha_t - \alpha_0\|_{C^1} = t \cdot \|\alpha_1 - \alpha_0\|_{C^1} < \varepsilon,$$

што показује да је свака α_t контактна. $\square$

1.2 Главна раслојења

Дефиниција 1.2.1. Лијева група G је многострукост која је уједно и група, таква да су пресликавања

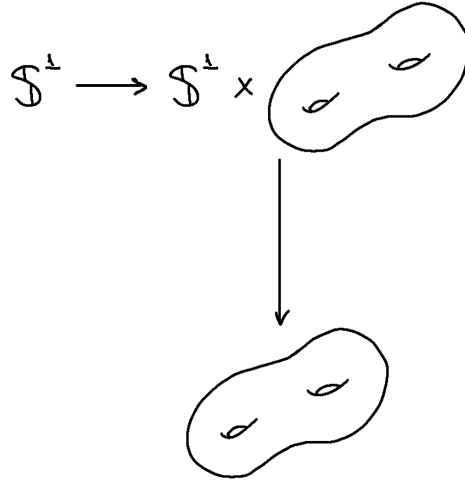
$$m: G \times G \longrightarrow G, \quad (g_1, g_2) \longmapsto g_1 \cdot g_2, \quad i: G \longrightarrow G, \quad g \longmapsto g^{-1}$$

глатка.

Пример 5. Кружница $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = S^1 \subseteq \mathbb{C}$ је пример Лијеве групе.

Пример 6. Група $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ у односу на множење је пример Лијеве групе.

Дефиниција 1.2.2. G –главно раслојење је уређена четворка (E, M, π, G) таква да је (E, M, G, π) раслојење, а G Лијева група која десно дејствује на простору E при чему то дејство чува слојеве и на сваком од слојева је слободно и транзитивно. G се назива структурном групом главног раслојења (E, M, π, G) .



Слика 1.1: S^1 главно раслојење $\pi : E \rightarrow M$ са тоталним простором $S^1 \times M$ над оријентабилном површи M .

У претходној дефиницији смо навели да ће слој G –главног раслојења бити управо Лијева група G . То можемо видети на следећи начин.

Како је $\pi : E \rightarrow M$ раслојење, то имамо да је пресликавање π_* сурјективно, те је свака тачка $p \in M$ регуларна вредност овог пресликавања. Самим тим добијамо да ће $\pi^{-1}(\{p\})$ заиста бити подмногострукост од E , те самим тим и многострукост.

Увидимо да како је дејство G слободно и транзитивно на свакој фибри, то је свака фибра у склопу G –главног раслојења дифеоморфна са G . Заиста, уколико уочимо произвољну фибру и у њој произвољну тачку $a \in p^{-1}\{b\}$, то из транзитивности имамо да за сваку другу тачку $c \in p^{-1}\{b\}$ постоји $g \in G$ такво да важи $a \cdot g = c$. Из слободности закључујемо да уколико би постојали $g_1, g_2 \in G$ такви да важи $a \cdot g_1 = c = a \cdot g_2$, тада бисмо имали да је $(a \cdot g_1) \cdot g_2 = a \cdot (g_1 g_2^{-1}) = a$, те на основу слободности закључујемо да је $g_1 g_2^{-1} = e$ односно да је $g_1 = g_2$. Дакле пресликавање $\sigma_p : G \rightarrow p^{-1}(\{b\}) : g \mapsto a \cdot g$ ће успоставити дифеоморфизам између ових многострукости.

Пример 7. Нека је M произвољна многострукост. Тада је $p_1 : M \times S^1 \rightarrow M$ заједно са дејством S^1 на $M \times S^1$ датим са $e^{i\theta} \cdot (p, e^{i\varphi}) = (p, e^{i(\theta+\varphi)})$ једно S^1 -главно раслојење над $M \times S^1 / S^1 \approx M$. Ово раслојење називамо *привичним S^1 главним раслојењем*.

Пример 8. Мултипликативна група $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ дејствује на $\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$ по правилу

$$t \cdot x, \text{ за } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ и } x \in \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}.$$

Уз то, јасно да је $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ уједно и многострукост као отворена подмногострукост од $\mathbb{R}$ на којој је операција множења непрекидна, те је $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ заправо Лијева група. Јасно се види да је дефинисано дејство слободно и транзитивно, док је простор орбита $(\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}) / (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \approx \mathbb{R}P^n$.

Овиме смо показали да је $\pi : \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ једно $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ -главно раслојење, где је π пројекција на количнички простор.

Дефиниција 1.2.3. Нека је $E \rightarrow M$ главно раслојење са структурном Лијевом групом G , чија је Лијева алгебра $\mathfrak{g}$, и нека је за $p \in E$

$$\sigma_p : G \rightarrow E : g \mapsto p \cdot g$$

пресликавање дефинисано десним дејством G на E . Тада је за сваки вектор $\xi \in \mathfrak{g}$ са

$$\hat{\xi}_p = (\sigma_p)_* \xi \in T_p E$$

дефинисано векторско поље $\hat{\xi}$ на E , које називамо *фундаменталним векторским пољем придруженим вектору ξ* .

Како смо већ прокоментарисали да је управо пресликавање σ_p дифеоморфизам на орбиту, то имамо да је оно специјално имерзија на орбиту. Како је свака орбита утопљена као подмногострукост у E , то имамо да је $\sigma_p : G \rightarrow \pi^{-1}(\{p\}) \rightarrow E$ имерзија као композиција дифеоморфизма и улагања. Стога закључујемо да постоји $\dim G$ линеарно независних фундаменталних векторских поља.

За сваку Лијеву групу G имамо добро дефинисану *леву и десну трансляцију елементом $g \in G$* које су глатка пресликавања $L_g : G \rightarrow G : x \mapsto g \cdot x$ и $R_g : G \rightarrow G : x \mapsto x \cdot g$.

Лема 1.2.4. Нека је G Лијева група и $L_g : G \rightarrow G$ и $R_g : G \rightarrow G$ лева и десна трансляција на њој. Ова пресликавања су дифеоморфизми Лијеве групе G .

Доказ. Јасно видимо да је $L_g \circ L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} \circ L_g = \text{id}_G$, као и да је $R_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ R_g = \text{id}_G$. Како су $L_{g^{-1}}$ и $R_{g^{-1}}$ глатка пресликавања то добијамо тражено тврђење. $\square$

Дефиниција 1.2.5. Нека је $E \rightarrow B$ главно раслојење са структурном Лије-вом групом G , чија је Лијева алгебра $\mathfrak{g}$. Дефинишемо пресликавање

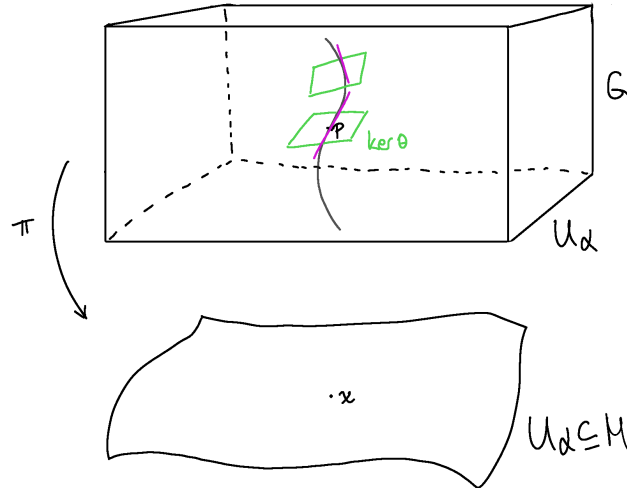
$$\text{Ad}(g) = (d(L_g \circ R_{g^{-1}}))_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}.$$

Дефиниција 1.2.6. Нека је дато G главно раслојење $E \rightarrow M$. Диференцијалну 1-форму $\theta \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ са својствима

1. $R_g^* \theta = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \theta$
2. $\theta(\hat{v}) = v$ за све $v \in \mathfrak{g}$

где је $\hat{v}$ фундаментално векторско поље придружено вектору v називамо *формом конекције на G главном раслојењу $E \rightarrow M$* .

Може се показати да свако G -главно раслојење допушта форму конекције, видети [13].



Слика 1.2: Локална тривијализација раслојења над $U_\alpha \subseteq M$ и хоризонтална дистрибуција $\ker \theta$ у тачки p .

Пример 9. У случају када је структурна група $G = S^1$ ситуација се значајно упростила. Наиме имамо да је

$$T_e S^1 = i\mathbb{R} \cong \mathbb{R},$$

те форму конекције на S^1 главном раслојењу можемо видети као диференцијалну 1-форму $\theta \in \Omega^1(E, \mathbb{R})$. Како је $\mathbb{R}$ комутативна група, то је $Ad(g) = id_{\mathfrak{g}}$ па први услов постаје

$$R_g^* \theta = \theta.$$

Додатно, можемо сматрати да је $S^1 \subseteq \mathbb{C}$, па сваки елемент S^1 можемо записати у облук e^{it} и диференцирањем претходног израза по t добијамо

$$\left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_{t=0} R_{e^{it}}^* \theta = \mathcal{L}_X \theta = 0,$$

где смо са X означили фундаментално векторско поље придружено вектору $(iz_1 \partial_{z_1} + iz_2 \partial_{z_2})_{(1,0)} \in T_{(1,0)} S^1$. Коришћењем Картанове формуле добијамо да је $\mathcal{L}_X \theta = \iota_X d\theta + d\iota_X \theta = \iota_X d\theta = 0$.

Пример 10. Нека је дато Хопфово раслојење $\pi : S^3 \rightarrow S^2$. Оно има структуру S^1 -главног раслојења где је дејство дато са

$$e^{i\theta} \cdot (z_1, z_2) = (e^{i\theta} \cdot z_1, e^{i\theta} \cdot z_2), \quad e^{i\theta} \in S^1, \quad (z_1, z_2) \in S^3 \subseteq \mathbb{C}^2.$$

Директном провером добијамо да је векторско поље генерисано S^1 -дејством дато са $X_{(z_1, z_2)} = (iz_1 \partial_{z_1} + iz_2 \partial_{z_2})_{(z_1, z_2)}$. Форма $\theta \in \Omega^1(S^3)$ дата са

$$\theta = -i \cdot (\bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2)$$

ће бити једна форма конекције на овом раслојењу. Заиста, видимо да је

$$\theta_{(z_1, z_2)}(X) = -i(\bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2)_{(z_1, z_2)}(iz_1, iz_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1,$$

где последња једнакост важи јер $(z_1, z_2) \in S^3$. Уз то видимо да ће форма θ бити инваријантна у односу на S^1 дејство из

$$(e^{i\theta})^*(-i(\bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2)) = -i(e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta} \bar{z}_1 dz_1 + e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta} \bar{z}_2 dz_2) = -i(\bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2).$$

Иако легитиман, претходни рачун треба пажљиво спровести и обратити пажњу на то да дифеоморфизам $e^{i\theta} : S^3 \rightarrow S^3$ посматрамо уједно као множење са $e^{i\theta}$ по координатама z_1 и z_2 и као дифеоморфизам са диференцијалом

$$de^{i\theta} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

1.3 Инваријантне контактне форме

Нека је E затворена многострукост таква да на њој имамо задато глатко S^1 дејство које је слободно и транзитивно по фибрама. Уколико S^1 видимо као подскуп у $\mathbb{C}$, тада када фиксирамо неку тачку p многострукости E можемо посматрати криве $\varphi^s(p) : S^1 \rightarrow E$ дефинисане са $s \mapsto e^{is} \cdot p$ и дефинисати векторско поље на E дато са

$$\left(\frac{d}{ds} \right) \Big|_{s=0} \varphi^s(p) = X_p.$$

На основу глатке зависности решења обичне диференцијалне једначине од почетних услова, ово векторско поље ће бити глатко. Ово ће управо бити фундаментално векторско поље X придружено вектору $(iz_1\partial_{z_1} + iz_2\partial_{z_2})_{(1,0)} \in T_{(1,0)}S^1$.

Дефиниција 1.3.1. Фундаментално векторско поље X придружено вектору $(iz_1\partial_{z_1} + iz_2\partial_{z_2})_{(1,0)} \in T_{(1,0)}S^1$, а које смо експлицитно конструисали у претходном пасусу ћемо називати *векторским пољем придруженим S^1 дејству*.

Дефиниција 1.3.2. Нека је дато $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ главно раслојење $\pi : E \rightarrow M$ и нека је $\alpha \in \Omega^k(E)$ произвољна диференцијална k -форма. За α кажемо да је *инваријантна у односу на S^1 дејство на E* уколико важи да је

$$(\varphi^s)^* \alpha = \alpha, \text{ за свако } s \in S^1,$$

где је $\{\varphi^s\}_{s \in S^1}$ једнопараметарска група дифеоморфизама генерисана векторским пољем X које је придружено S^1 дејству.

На основу својства једнопараметарске групе дифеоморфизама и дефиниције Лијевог извода дуж векторског поља добијамо да је претходна дефиниција еквивалентна томе да је $\mathcal{L}_X \alpha = 0$, где је X векторско поље придружено S^1 дејству.

Како ћемо се надаље бавити инваријантним контактним структурама на S^1 -главним раслојењима над затвореним површима, то надаље претпостављамо да је $\dim E = 3$ и $\dim M = 2$, као и да су многострукости E и M затворене и оријентабилне.

Лема 1.3.3. Нека је дато $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ главно раслојење $\pi : E \rightarrow M$ и нека је $\alpha \in \Omega^k(E)$ произвољна диференцијална k -форма. Форма α је инваријантна ако и само ако је $\mathcal{L}_X \alpha = 0$.

Доказ. ($\Rightarrow$) Нека је форма $\alpha \in \Omega^k(E)$ инваријантна. Тада имамо да за свако $s \in S^1$ важи да је

$$(\varphi^s)^* \alpha = \alpha.$$

Диференцирањем претходног израза по s добијамо да је

$$\mathcal{L}_X \alpha = \left(\frac{d}{ds} \right) \Big|_{s=0} (\varphi^s)^* \alpha = \left(\frac{d}{ds} \right) \Big|_{s=0} \alpha = 0.$$

($\Leftarrow$) Нека за форму $\alpha \in \Omega^k(E)$ важи да је $\mathcal{L}_X \alpha = 0$. То значи да је

$$\left(\frac{d}{ds} \right) \Big|_{s=0} (\varphi^s)^* \alpha = 0.$$

Како је $\{\varphi^s\}_{s \in S^1}$ једнопараметарска група дифеоморфизама, то видимо да за произвољно $s = t_0 \in S^1$ важи да је

$$\left(\frac{d}{ds} \right) \Big|_{s=t_0} (\varphi^s)^* \alpha = \left(\frac{d}{ds} \right) \Big|_{s=0} (\varphi^{t_0})^* (\varphi^s)^* \alpha = (\varphi^{t_0})^* \mathcal{L}_X \alpha = 0,$$

где претпоследња једнакост важи јер $(\varphi^{t_0})^*$ и $\left(\frac{d}{ds} \right) \Big|_{s=0}$ комутирају. Одавде видимо да је пресликавање $S^1 \rightarrow \Omega^k(E) : s \mapsto (\varphi^s)^* \alpha$ константно. Како је $\varphi^0 = \text{id}_{S^1}$, то добијамо тврђење. $\square$

У примеру 9 смо видели да за форму конекције θ на S^1 —главном раслојењу $\pi : E \rightarrow M$ мора да важи $\mathcal{L}_X \theta = 0$, где смо са X означили векторско поље придружено S^1 дејству. Самим тим је форма конекције један пример инваријантне форме.

На основу комутативности Лијевог извода и диференцијала добијамо да је и $\mathcal{L}_X d\theta = 0$. Како је уз то и пресликавање $\pi_* : \ker \theta \rightarrow TM$ изоморфизам, то имамо добро дефинисану форму $\Omega \in \Omega^2(M)$ такву да је $d\theta = \pi^* \Omega$.

Дефиниција 1.3.4. Нека је дато S^1 —главно раслојење $\pi : E \rightarrow M$ и θ форма конекције на њему. Форму $\Omega \in \Omega^2(M)$ такву да је

$$d\theta = \pi^* \Omega$$

називамо формом кривине форме конекције θ .

Може се показати да важи наредна теорема о класификацији S^1 —главних раслојења над фиксном површи M чији се доказ може пронаћи у [6].

Теорема 1.3.5. Нека је $\pi : E \rightarrow M$ једно S^1 -главно раслојење над површи и θ форма конекције на њему. Тада је оно у пошћуносћи одређено кохомолошком класом $[\Omega] \in H_{\text{dR}}^2(M)$, где је Ω форма кривине придружена форми конекције θ . Кохомолошка класа $[\Omega]$ не овиси о избору форме конекције.

Дефиниција 1.3.6. За контактну форму $\alpha \in \Omega^1(E)$ на тоталном простору S^1 главног раслојења $\pi : E \rightarrow M$ кажемо да је инваријантна контактна форма уколико важи да је инваријантна у односу на S^1 дејство на E .

1.4 Дефиниција скупа Σ и примери инваријантних контактних структура

Дефиниција 1.4.1. Нека је $\pi : E \rightarrow M$ једно S^1 -главно раслојење, $\alpha \in \Omega^1(E)$ инваријантна контактна форма и X векторско поље придружено S^1 дејству. Глатку функцију $\alpha(X) \in C^\infty(E)$ називамо Хамилтонијаном.

Лема 1.4.2. Нека је $\pi : E \rightarrow M$ једно S^1 -главно раслојење, $\alpha \in \Omega^1(E)$ инваријантна контактна форма. Хамилтонијан $\alpha(X) \in C^\infty(E)$ је инваријантан дуж линија шока векторског поља X и постоји главно пресликавање $\varphi \in C^\infty(M)$ шакво да важи $\pi^*\varphi = \alpha(X)$.

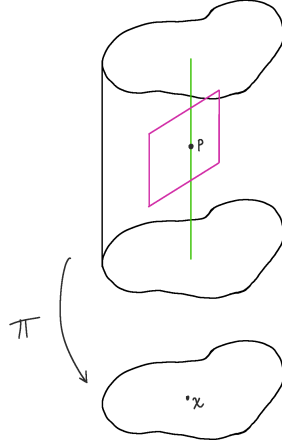
Доказ. На основу инваријантности α добијамо да је

$$\mathcal{L}_X(\alpha(X)) = (\mathcal{L}_X\alpha)(X) + \alpha([X, X]) = 0,$$

што показује да је функција $\alpha(X)$ инваријантна у односу на S^1 дејство. Самим тим, имамо добро дефинисано пресликавање $\varphi \in C^\infty(M)$ дато са $\pi^*\varphi = \alpha(X)$, што је и требало показати. $\square$

Дефиниција 1.4.3. Нека је дато S^1 -главно раслојење $\pi : E \rightarrow M$, нека $\alpha \in \Omega^1(E)$ инваријантна контактна форма и $\varphi \in C^\infty(M)$ коју даје лема 1.4.2. Скуп $\Sigma = \{p \in M \mid \varphi = 0\}$ називамо сингуларним скупом. Скуп $\pi^{-1}\{p\}$ за $p \in \Sigma$ ћемо називати Лежандровом орбитом.

Приметимо да је скуп $\Sigma \subseteq M$ скуп у бази који одговара скупу $\{p \in E \mid \alpha_p(X) = 0\}$ у тоталном простору S^1 главног раслојења $\pi : E \rightarrow M$. Специјално, видимо да Лежандровој орбити одговара кружница S^1 у тоталном простору E која свуда лежи у контактної структури.



Слика 1.3: Тачка $p \in \pi^{-1}(\Sigma)$: контактна раван садржи правац влакна, тј. $\alpha(X) = 0$.

Став 1.4.4. Нека је $\pi : E \rightarrow M$ једно S^1 главно раслојење и $\theta \in \Omega^1(E)$ форма конекције на њему. За сваку инваријантну диференцијалну 1-форму $\alpha \in \Omega^1(E)$ постоје функција $\varphi \in C^\infty(M)$ и диференцијална 1-форма $\beta \in \Omega^1(M)$ такве да важи

$$\alpha = \pi^* \varphi \cdot \theta + \pi^* \beta.$$

Доказ. Нека је $\alpha(X)$ Хамилтонијан и нека је φ глатка функција таква да је $\pi^* \varphi = \alpha(X)$, а која постоји на основу леме 1.4.2. Уочимо да је тада

$$\mathcal{L}_X(\alpha - \pi^* \varphi \cdot \theta) = \mathcal{L}_X \alpha - X(\pi^* \varphi) \cdot \theta - \pi^* \varphi \cdot \mathcal{L}_X \theta = 0,$$

што показује да је диференцијална 1-форма $\alpha - \pi^* \varphi \cdot \theta$ инваријантна у односу на S^1 дејство. Између осталог, видимо да је и $(\alpha - \pi^* \varphi \cdot \theta)(X) = \alpha(X) - \alpha(X) \cdot \theta(X) = 0$. Самим тим, постоји диференцијална 1-форма $\beta \in \Omega^1(M)$ таква да важи $\pi^* \beta = \alpha - \pi^* \varphi \cdot \theta$, што је и требало показати. □

Лема 1.4.5. Нека је $\pi : E \rightarrow M$ једно S^1 главно раслојење и $\theta \in \Omega^1(E)$ форма конекције на њему. Форма $\alpha \in \Omega^1(E)$ је контактна ако и само ако је до на знак $\varphi^2 \cdot \Omega + \varphi \cdot d\beta + \beta \wedge d\varphi$ форма зајремине на M , при чему су φ и β дефинисани у ставу 1.4.4.

Доказ. Користећи став 1.4.4 добијамо да је $\alpha = \pi^*\varphi \cdot \theta + \pi^*\beta$ за неке $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ и $\beta \in \Omega^1(M)$. Директним рачуном добијамо да је

$$d\alpha = (\pi^*d\varphi) \wedge \theta + \pi^*\varphi \cdot \pi^*\Omega + \pi^*d\beta,$$

где је $\Omega \in \Omega^2(M)$ форма кривине за θ , те узимајући у обзир димензију M добијамо да је

$$\alpha \wedge d\alpha = (\pi^*\varphi)^2 \cdot \theta \wedge \pi^*\Omega + \pi^*\varphi \cdot \theta \wedge \pi^*d\beta + \pi^*(\beta \wedge d\varphi) \wedge \theta.$$

($\Rightarrow$) Претпоставимо да је форма α контактна. Тада имамо да важи $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$, те како је векторско поље X придружено S^1 дејству неишчезавајуће, то добијамо да је

$$\iota_X(\alpha \wedge d\alpha) = \pi^*\varphi^2 \cdot \pi^*\Omega + \pi^*\varphi \cdot \pi^*d\beta + \pi^*(\beta \wedge d\varphi) = \pi^*(\varphi^2 \cdot \Omega + \varphi \cdot d\beta + \beta \wedge d\varphi) \neq 0.$$

На основу чињенице да је $\pi_* : \ker \theta \rightarrow TM$ изоморфизам добијамо да је

$$\varphi^2 \cdot \Omega + \varphi \cdot d\beta + \beta \wedge d\varphi \neq 0$$

у свакој тачки E јер у супротном форма α не би била контактна.

($\Leftarrow$) Претпоставимо сада да је

$$\varphi^2 \cdot \Omega + \varphi \cdot d\beta + \beta \wedge d\varphi \neq 0.$$

Већ смо видели да важи

$$\alpha \wedge d\alpha = (\pi^*\varphi)^2 \cdot \theta \wedge \pi^*\Omega + \pi^*\varphi \cdot \theta \wedge \pi^*d\beta + \pi^*(\beta \wedge d\varphi) \wedge \theta.$$

Како је векторско поље X придружено S^1 дејству неишчезавајуће, то је довољно проверити да је

$$\iota_X(\alpha \wedge d\alpha) = \pi^*(\varphi^2 \cdot \Omega + \varphi \cdot d\beta + \beta \wedge d\varphi) \neq 0.$$

На основу антисиметричности клинастог производа и антисиметричности $d\alpha$ по аргументима, за друга два векторска поља можемо претпоставити без умањења општости да леже унутар $\ker \theta$. Како је $\pi_* : \ker \theta \rightarrow TM$ изоморфизам и како је $\varphi^2 \cdot \Omega + \varphi \cdot d\beta + \beta \wedge d\varphi$ форма запремине на M по претпоставци, то добијамо да је форма α контактна, што је и требало доказати. $\square$

На основу претходне леме и чињенице да је $\varphi|_{\Sigma} = 0$ добијамо да се контактни услов на $\pi^{-1}(\Sigma)$ своди на

$$\beta \wedge d\varphi \neq 0,$$

док на $\pi^{-1}(M \setminus \Sigma)$ добијамо да се контактни услов своди на испитивање да је

$$\varphi^2 \left(\Omega + \left(\frac{d\beta}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} \cdot \beta \wedge d\varphi \right) \right) = \varphi^2 \left(\Omega + d \left(\frac{\beta}{\varphi} \right) \right) \neq 0,$$

што је еквивалентно томе да је

$$\Omega + d \left(\frac{\beta}{\varphi} \right) \neq 0,$$

на основу чињенице да је $\varphi \neq 0$ на $M \setminus \Sigma$.

Лема 1.4.6. $\Sigma = \varphi^{-1}(0)$ ће бити коначна дисјунктна унија кружница.

Доказ. Приметимо да ће 0 бити регуларна вредност функције φ , иначе на Σ добијамо да важи $\beta \wedge d\varphi|_{\Sigma} = 0$, супротно претпоставци да је α контактна форма. Стога ће $\Sigma = \varphi^{-1}(0)$ бити затворена подмногострукост од M димензије 1 односно нека коначна дисјунктна унија кружница. $\square$

Лема 1.4.7. Нека је $\pi : E \rightarrow M$ једно S^1 -главно раслојење. Претпоставимо да постоји $\alpha \in \Omega^1(E)$ инваријантна контактна форма на E . Додајмо, нека је Σ сингуларни скуп придружен форми α . Уколико две компоненте повезаности M_i и M_j скупа $M \setminus \Sigma$ додирују исту кружницу, онда се знак φ на M_i и M_j мора разликовати.

Доказ. Претпоставимо супротно. Тада постоје компоненте повезаности M_i и M_j скупа $M \setminus \Sigma$ које се додирују дуж кружнице $\Sigma_k \subseteq \Sigma$. Нека је уз то $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ крива у M таква да сече само кружницу $\Sigma_k \subseteq \Sigma$ и то трансверзално у тачки $\gamma(0) \in \Sigma_k$.

Тада бисмо имали да је $d\varphi(\gamma'(0)) = (\varphi \circ \gamma)'(0) = 0$, где последња једнакост важи јер је 0 локални екстремум функције $\varphi \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ на основу претпоставке о знаку.

Нека је сада $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_i$ нека параметризација кружнице $\Sigma_i \subseteq \Sigma$ таква да је $\gamma_i(0) = \gamma(0)$. Како је функција φ константна дуж криве γ_i , то добијамо да је

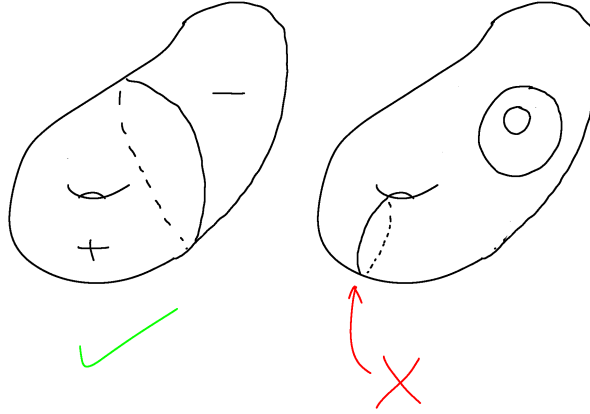
$$d\varphi(\gamma_i'(0)) = (\varphi \circ \gamma_i)'(0) = 0.$$

Дакле у тачки $\gamma(0) \in \Sigma_k \subseteq \Sigma \subseteq M$ имамо два линеарно независна вектора $\gamma'_i(0)$ и $\gamma'(0)$ на којима се $(d\varphi)_{\gamma(0)}$ анулира на основу претпоставке о трансверзалонсти. Како је $\dim M = 2$, то добијамо да је $(d\varphi)_{\gamma(0)} = 0$, али онда имамо и да је $(\beta \wedge d\varphi)_{\gamma(0)} = 0$, што је у супротности са претпоставком да је α контактна на $\pi^{-1}(\Sigma)$.

□

Приметимо да нам лема 1.4.7 даје неопходан услов за неку коначну дисјунктну унију кружница Σ у M не би ли она била сингуларни скуп неке инваријантне контактне форме α на S^1 -главном раслојењу $\pi : E \rightarrow M$.

Дефиниција 1.4.8. За неки коначни скуп кружница $\Sigma \subseteq M$ кажемо да испуњава *услов знака* уколико сваку од компоненти повезаности скупа $M \setminus \Sigma$ можемо означити знаковима $+$ или $-$ тако да компоненте које се додирују дуж заједничке кружнице буду означене супротним знаковима.



Слика 1.4: Скуп кружница Σ на левој површи задовољава услов знака, док на десној не задовољава.

Примери инваријантних контактних структура

Пример 11. Нека је дато Хопфово раслојење $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ заједно са S^1 дејством на $\{|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} = S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$:

$$e^{i\varphi} \cdot (z_1, z_2) = (e^{i\varphi} z_1, e^{i\varphi} z_2), \text{ за } (z_1, z_2) \in S^3, e^{i\varphi} \in S^1.$$

Диференцирањем претходног израза по φ добијамо да ће векторско поље придружено S^1 дејству бити дато са $X_{(z_1, z_2)} = iz_1 \partial_{z_1} + iz_2 \partial_{z_2}$.

Нека је уз то $\alpha = \frac{i}{4} \cdot (z_1 d\bar{z}_1 - \bar{z}_1 dz_1 + z_2 d\bar{z}_2 - \bar{z}_2 dz_2) \in \Omega^1(S^3)$ диференцијална 1-форма на S^3 .

1. α је контактна форма: Директним рачуном добијамо да је

$$d\alpha = \frac{i}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2),$$

као и да је

$$\begin{aligned} \alpha \wedge d\alpha = & -\frac{1}{8}(z_1 \cdot d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 - \bar{z}_1 \cdot dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 + z_2 \cdot dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 - \\ & - \bar{z}_2 \cdot dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2) = \iota_X(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2), \end{aligned}$$

где је $X = -\frac{1}{8}(z_1 \partial_{z_1} + \bar{z}_1 \partial_{\bar{z}_1} + z_2 \partial_{z_2} + \bar{z}_2 \partial_{\bar{z}_2})$.

Сфера S^3 је дата као регуларни ниво глатке функције $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(z_1, z_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 - 1 \Rightarrow S^3 = f^{-1}(0),$$

чији је диференцијал у $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ дат са

$$df_{(z_1, z_2)} = (\bar{z}_1 dz_1 + z_1 d\bar{z}_1 + \bar{z}_2 dz_2 + z_2 d\bar{z}_2)_{(z_1, z_2)},$$

па директним рачуном добијамо да је $df_{(z_1, z_2)}(X) = -\frac{1}{8} \neq 0$. За подмногострукости које видимо као регуларне нивое неког глатког пресликавања важи да је њихов тангентни простор дат као језгро диференцијала пресликавања којим су дефинисане, то имамо да је $X_{(z_1, z_2)} \notin T_{(z_1, z_2)} S^3$ за свако $(z_1, z_2) \in S^3$.

Како је форма $dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2$ једна форма запремине на $\mathbb{C}^2$ и како важи да је $T_{(z_1, z_2)} S^3 + \mathcal{L}\{X_{(z_1, z_2)}\} = T_{(z_1, z_2)} \mathbb{C}^2$ за свако $(z_1, z_2) \in S^3$, то заиста добијамо да је $\alpha \wedge d\alpha$ једна форма запремине на S^3 , што је и требало доказати.

2. α је инваријантна: Понављањем потпуно аналогног резона из примера 10 добијамо да је форма α инваријантна у односу на уочено дејство.

3. Одређивање скупа Σ : Приметимо да је

$$\alpha_{(z_1, z_2)}(X) = \frac{1}{4}(|z_1|^2 + |z_2|^2) = \frac{1}{4} \neq 0, (z_1, z_2) \in S^3,$$

што значи да је сингуларни скуп Σ у овом случају празан.

Пример 12. Нека је дата многострукост $S^1 \times S^2$ таква да је t угаона координата на S^1 и (z, h) координате на S^2 , $z \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$, $h \in (-1, 1)$. Овде координату h схватамо као висину на S^2 .

Нека је дато S^1 дејство на тоталном простору раслојења $S^1 \times S^2$ са

$$s \cdot (t, z, h) = (s + t, z, h), s \in S^1,$$

и нека је $\alpha = h \cdot dt + \frac{i}{4}(z d\bar{z} - \bar{z} dz) \in \Omega^1(S^1 \times S^2)$. Приметимо да је простор орбита $S^1 \times S^2 / S^1$ дифеоморфан S^2 , као и да ће $X = \partial_t$ бити векторско поље придружено уоченом S^1 дејству. Дакле $\pi : S^1 \times S^2 \rightarrow S^2$ ће бити једно S^1 - главно раслојење, где је π пројекција на простор орбита. Желимо да покажемо да ће α бити једна инваријантна контактна форма на $S^1 \times S^2$.

1. α је контактна форма: Уколико координату z заменимо реалним координатама (x, y) добијамо да је

$$\alpha = h \cdot dt + \frac{1}{2}(x \cdot dy - y \cdot dx),$$

, те преласком са (x, y) координата на поларне координате (r, φ) добијамо да је

$$\alpha = h \cdot dt + \frac{1}{2}r^2 \cdot d\varphi = h \cdot dt + \frac{1 - h^2}{2} \cdot d\varphi,$$

где последња једнакост важи јер је $h^2 + r^2 = 1$ на сфери S^2 . Одавде видимо да је форма α глатка.

Изван северног и јужног пола сфере S^2 имамо да је $dh \neq 0$, те на основу тога што је

$$d\alpha = dh \wedge dt - h \cdot dh \wedge d\varphi$$

добијамо да је

$$\alpha \wedge d\alpha = -h^2 \cdot dt \wedge dh \wedge d\varphi - \frac{1 - h^2}{2} \cdot dt \wedge dh \wedge d\varphi = -\frac{1}{2} \cdot dt \wedge dh \wedge d\varphi \neq 0,$$

те видимо да је форма α контактна свуда сем можда на $S^1 \times \{N, S\}$.

Диференцирањем форме $\alpha = h \cdot dt + \frac{1}{2}(x \cdot dy - y \cdot dx)$ добијамо да је

$$d\alpha = dh \wedge dt + dx \wedge dy,$$

те како у тачкама $S^1 \times \{N, S\}$ важи да је $h = \pm 1$ и $dh = 0$, то имамо да је

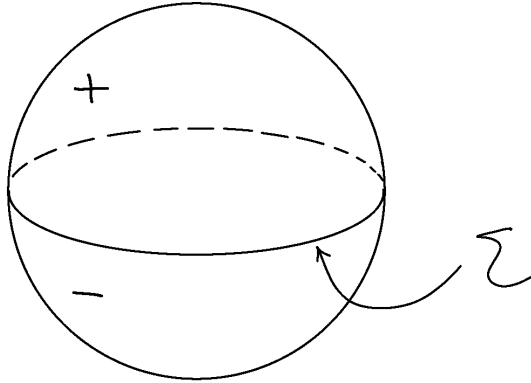
$$\alpha \wedge d\alpha = \pm dt \wedge dx \wedge dy \neq 0 \text{ на } S^1 \times \{N, S\}$$

што доказује да је форма α контактна на $S^1 \times S^2$.

2. α је инваријантна: Како смо већ видели да је векторско поље придружено S^1 дејству $X = \partial_t$ и како функције h и φ јасно не зависе од t , то на основу $\mathcal{L}_{\partial_t} dt = 0$ добијамо да је $\mathcal{L}_{\partial_t} \alpha = \mathcal{L}_{\partial_t} (h \cdot dt + \frac{1-h^2}{2} \cdot d\varphi) = 0$, што показује да је наша контактна форма инваријантна.

3. Одређивање скупа Σ : Приметимо да је $\alpha(X) = h$, те је $\alpha(X) = 0$ ако и само ако је $h = 0$, односно $\alpha(X)$ се анулира на скупу $S^1 \times \{p \in S^2 | h = 0\} \approx S^1 \times S^1$, који се при пројекцији $\pi : S^1 \times S^2 \rightarrow S^2$ на простор орбита слика на екваторијалну сферу у S^2 .

Како је $\alpha(X) = h$, то видимо да је знак функције φ на северној хемисфери $+$, док је на јужној хемисфери $-$, видети слику 1.5.



Слика 1.5: Слика пројекције скупа нула пресликацања $\alpha(X)$ на базну сферу S^2 је означена са Σ

Пример 13. Нека је дат торус T^3 са координатама $(\theta, \theta_1, \theta_2)$ и нека је на њему задато S^1 дејство са

$$e^{i\varphi} \cdot (\theta, \theta_1, \theta_2) = (\theta, \theta_1 + \varphi, \theta_2), e^{i\varphi} \in S^1.$$

Видимо да је векторско поље придружено S^1 дејству $X = \partial_{\theta_1}$, као и да је простор орбита дифеоморфан торусу T^2 .

Нека је $\alpha_n = \cos(2n\pi\theta) \cdot d\theta_1 + \sin(2n\pi\theta) \cdot d\theta_2 \in \Omega^1(T^3)$, $n \in \mathbb{N}$ диференцијална 1–форма на T^3 .

1. α_n је контактна форма: Директним рачуном добијамо да је

$$d\alpha_n = -2n\pi \cdot \sin(2n\pi\theta) \cdot d\theta \wedge d\theta_1 + 2n\pi \cos(2n\pi\theta) \cdot d\theta \wedge d\theta_2,$$

те добијамо да је

$$\begin{aligned} \alpha_n \wedge d\alpha_n &= -2n\pi \cos^2(2n\pi\theta) \cdot d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 - 2n\pi \sin^2(2n\pi\theta) \cdot d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \\ &= -2n\pi \cdot d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \neq 0 \end{aligned}$$

што показује да је форма α_n контактна.

2. α_n је инваријантна: Видели смо да је векторско поље придружено ученом S^1 дејству $X = \partial_{\theta_1}$. Применом Лијевог извода дуж X на форму α_n и употребом Картанове формуле добијамо

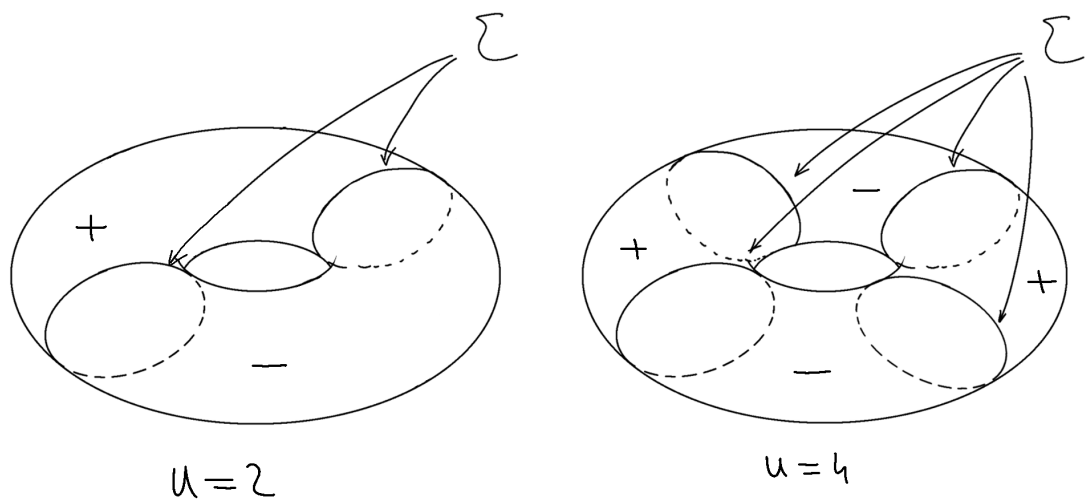
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \alpha &= d\iota_{\partial_{\theta_1}} \alpha_n + \iota_{\partial_{\theta_1}} d\alpha_n = \\ &= d(\cos(2n\pi\theta)) + 2n\pi \cdot \sin(2n\pi\theta) \cdot d\theta = -2n\pi \cdot \sin(2n\pi\theta) \cdot d\theta + 2n\pi \cdot \sin(2n\pi\theta) \cdot d\theta = 0, \end{aligned}$$

што показује да је форма α_n инваријантна.

3. Одређивање скруа Σ : Приметимо да је

$$(\alpha_n)_{(\theta, \theta_1, \theta_2)}(X) = \cos(2n\pi\theta),$$

те видимо да се претходна функција анулира на торусима $\theta = \frac{k}{2n}$, $k = 0, \dots, 2n-1$ чије су слике при пројекцији $\pi : T^3 \rightarrow T^2$ на простор орбита кружнице.



Слика 1.6: Сингуларни скупови Σ_2 и Σ_4 у T^2 инваријантних контактних форми α_2 и α_4 на S^1 -главном раслојењу $\pi : T^3 \rightarrow T^2$.

Глава 2

Конструкција инваријантних контактних форми

У претходном поглављу смо видели да уколико постоји инваријантна контактна форма $\alpha \in \Omega^1(E)$ на тоталном простору S^1 -главног раслојења $\pi : E \rightarrow M$, онда је њен сингуларни скуп Σ нека коначна дисјунктна унија кружница у M која задовољава услов знака (видети дефиницију 1.4.8).

Испоставиће се да за сваки коначни скуп кружница у $\Sigma \subseteq M$ такав да он задовољава услов знака постоји инваријантна контактна форма α чији је сингуларни скуп управо Σ , односно важиће наредна теорема.

Теорема 2.0.1. *Нека је $\Sigma \subseteq M$ произвољна коначна унија кружница које задовољавају услов знака. Тада на произвољном S^1 -главном раслојењу $\pi : E \rightarrow M$ постоји инваријантна контактна форма $\alpha \in \Omega^1(E)$ чији је сингуларни скуп Σ . Оријентација форме α се може произвољно изабрати.*

2.1 Бутби-Ванг теорема и случај $\Sigma = \emptyset$

Дефиниција 2.1.1. Нека је M произвољна многострукост и $X \in \mathfrak{X}(M)$ векторско поље на њој такво да је $X_p \neq 0$ за сваку тачку $p \in M$. За X кажемо да је *регуларно векторско поље* уколико важи да свака тачка $p \in M$ има координатну околину облика $\{x_i \leq 1 | i \in [1, n]\}$ такву да је произвољна интегрална крива векторског поља X сече највише једном и у којој је локални запис X у новим координатама ∂_n . За контактну форму $\alpha \in \Omega^1(M)$ на контактної

ГЛАВА 2. КОНСТРУКЦИЈА ИНВАРИЈАНТНИХ КОНТАКТНИХ ФОРМИ

многострукости M кажемо да је *регуларна* уколико је њој придружено Ребово векторско поље R_α регуларно.

Приметимо да нам услов да векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ нигде није нула даје за произвољну тачку околину такву да је у новим координатама наше векторско поље ∂_n на основу теореме о исправљивости векторског поља. То нам *априори* не гарантује да ће наше векторско поље уједно бити и регуларно, што илуструјемо у наредном примеру.

Пример 14. Нека је дата контактна многострукост $(S^3, \alpha_{a,b})$ где је контактна форма дата са

$$\alpha_{a,b} = \frac{i}{2}(a(z_1 d\bar{z}_1 - \bar{z}_1 dz_1) + b(z_2 d\bar{z}_2 - \bar{z}_2 dz_2)), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Видимо да ће Ребово векторско поље $R_{\alpha_{a,b}}$ форме бити

$$(R_{\alpha_{a,b}})_{(z_1, z_2)} = \left(\frac{i\sqrt{2}}{a} z_1 \partial_{z_1} + \frac{i\sqrt{2}}{b} z_2 \partial_{z_2} \right)_{(z_1, z_2)}.$$

Директном провером се добија да ће линије тока Ребовог векторског поља бити дате са

$$\varphi_{R_{\alpha_{a,b}}}^t : (z_1, z_2) \mapsto \sqrt{2}(e^{\frac{it}{a}} \cdot z_1, e^{\frac{it}{b}} \cdot z_2),$$

одакле видимо да за рационални однос коефицијената a и b добијамо скуп затворених кривих, док за $\frac{a}{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ се интегралне криве Ребовог векторског поља густо намотавају на торус $T^2 = \{|z_1| = A \cdot |z_2| = \text{const.}\}$, $A > 0$. Како су у случају $\frac{a}{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ интегралне криве густо намотане на торус, то ниједна његова тачка нема регуларну околину, те самим тим Ребово векторско поље у овом случају није регуларно, а самим тим ни одговарајућа контактна форма.

Дефиниција 2.1.2. Нека је M произвољна многострукост. За затворену диференцијалну форму $\Omega \in \Omega^n(M)$ кажемо да је *интегрална* уколико се налази у слици хомоморфизма $\bar{\rho}_{\mathbb{Z}} : H^n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(M; \mathbb{R})$ индукованог хомоморфизмом прстена $\rho_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$.

У случају регуларних контактних форми имамо њихову потпуну карактеризацију што је садржај следеће теореме коју наводимо без доказа, а чији се доказ може наћи у [4].

Теорема 2.1.3 (Бутби-Ванг). 1. Нека је (M, Ω) затворена симплектичка многострукост димензије $2n$ са интегралном симплектичком формом

ГЛАВА 2. КОНСТРУКЦИЈА ИНВАРИЈАНТНИХ КОНТАКТНИХ ФОРМИ

$\frac{\Omega}{2\pi}$. Нека је $\pi : E \rightarrow M$ S^1 -главно раслојење са Ојлеровом класом $-\left[\frac{\Omega}{2\pi}\right] \in H^2(M; \mathbb{Z})$. Тада постоји 1-форма конекције α на E таква да је α регуларна контактна форма чија је форма кривине Ω . Њено Ребово векторско поље R_α се поклапа са векторским пољем индукованим S^1 дејством на E .

2. Обратно, уколико је α регуларна контактна форма на E тада је она до на скалирање 1-форма конекције на S^1 главном раслојењу $\pi : E \rightarrow M$ над симплектичком мноштрукошћу (M, Ω) , где је Ω форма кривине од α .

Дакле по ставки 2. Бутби-Ванг теореме закључујемо да свака регуларна контактна форма на контактної 3-многострукости индукује S^1 главно раслојење над неком површи такво да његов тотални простор одговара нашој контактної многострукости. Уз то ће важити да је уочена контактна форма до на множење скаларом нека форма конекције на овом раслојењу.

У наставку дајемо доказ тачке 2. теореме 2.1.3, док се њен доказ у целости може наћи у [4].

Доказ. Нека је $\tilde{\theta}$ произвољна форма конекције на E . Тада је на основу својства форме конекције $d\tilde{\theta} = \pi^*\tilde{\Omega}$ за неко $\tilde{\Omega} \in \Omega^2(M)$. На основу дефиниције видимо да је форма $\tilde{\Omega}$ затворена, па на основу класификације S^1 главних раслојења имамо да важи $[\tilde{\Omega}] = [\Omega]$ у $H_{\text{dR}}^2(M)$. Одатле следи да је $\Omega - \tilde{\Omega} = d\beta$ за неко $\beta \in \Omega^1(M)$.

За форму $\theta = \tilde{\theta} + \pi^*\beta$ видимо да је форма конекције на $\pi : E \rightarrow M$ на основу чињеница да је θ збир инваријантних форми и $\tilde{\theta}(X) = 1$ јер је $\tilde{\theta}$ форма конекције. Уз то, приметимо да је $d\theta = \pi^*\Omega$.

Како је Ω симплектичка на M , то имамо да је $\theta \wedge (d\theta)^{\wedge n} = \theta \wedge \pi^*(\Omega^{\wedge n}) \neq 0$, што показује да је θ контактна форма.

Уз то, како је θ форма конекције на $\pi : E \rightarrow M$, то имамо да је $\theta(X) = 1$ и $\mathcal{L}_X\theta = 0$, што имплицира да је векторско поље придружено S^1 -дејству управо Ребово векторско поље контактне форме θ . У карти на E индукованој тривијализацијом $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times S^1$ заједно са радијалном координатом θ на S^1 видимо да ће Ребово векторско поље имати запис ∂_θ . Самим тим, видимо да је форма α регуларна. $\square$

Приметимо да за контактну форму из претходне теореме ниједна орбита неће бити Лежандрова, односно Σ је празан скуп.

ГЛАВА 2. КОНСТРУКЦИЈА ИНВАРИЈАНТНИХ КОНТАКТНИХ ФОРМИ

Лема 2.1.4. *Нека је $\pi : E \rightarrow M$ тривијално S^1 -главно раслојење. Тада на E не постоји инваријантна контактна форма чији је сингуларни скуп $\Sigma = \emptyset$.*

Доказ. Раније смо видели да се провера контактнoг услова у овом случају своди на проверу да је $\Omega + d\beta \neq 0$ за неко $\beta \in \Omega^1(M)$. Уколико је раслојење $\pi : E \rightarrow M$ тривијално, тада на основу класификације S^1 -главних раслојења имамо да је $[\Omega] = 0$, те на основу Стоксове формуле добијамо да је

$$\int_M \Omega + d\beta = 0,$$

што посебно значи да не важи $\Omega + d\beta \neq 0$ на читавом M . $\square$

Дакле случај када је $\Sigma = \emptyset$ је једино могућ када је раслојење нетривијално.

Лема 2.1.5. *Уколико је раслојење $\pi : E \rightarrow M$ нетривијално, тада постоји регуларна инваријантна контактна форма чији је сингуларни скуп $\Sigma = \emptyset$.*

Доказ. Нека је θ форма конекције на $\pi : E \rightarrow M$ и Ω њој придружена форма кривине. Како је раслојење нетривијално, то имамо да је $[\Omega] \neq 0$. Тада важи да је $\int_M \Omega = c \neq 0$.

Нека је $v \in \Omega^2(M)$ форма запремине на M таква да је

$$\int_M v = 1.$$

Имамо да важи

$$\int_M cv - \Omega = 0,$$

те имамо да постоји диференцијална 1-форма β на M таква да је $d\beta = cv - \Omega$, односно $\Omega + d\beta = cv$.

Нека је сада $\hat{\theta} = \theta + \pi^*\beta$. На основу инваријантности форми θ и $\pi^*\beta$ видимо да је ово једна инваријантна форма. Како је

$$\hat{\theta}(X) = \theta(X) + \pi^*\beta(X) = 1,$$

то имамо да је ово уједно и једна форма конекције, те самим тим имамо да је $\hat{\theta}(X) \neq 0$ на E .

На основу леме 1.4.5 и чињеница да је $\hat{\theta} = \theta + \pi^*\beta$ и $\hat{\theta}(X) \neq 0$ на E , видимо да се провера контактнoг услова своди на проверу да је $\Omega + d\beta \neq 0$. Задње важи на основу конструкције форме β јер имамо да је $\Omega + d\beta = cv \neq 0$.

Како је $\widehat{\theta}$ инваријантна и $\widehat{\theta}(X) = 1$, то имамо да је

$$\mathcal{L}_X \widehat{\theta} = \iota_X d\widehat{\theta} + d\iota_X \widehat{\theta} = \iota_X d\widehat{\theta} = 0.$$

Стога је X Ребово векторско поље контактне форме $\widehat{\theta}$.

Може се показати да је X регуларно векторско поље у некој карти на E на којој се раслојење тривијализује (за детаље видети корак 1.5.2. ставка h_t је локални дифеоморфизам у доказу теореме 3.2.1). Овиме је доказ завршен. $\square$

2.2 Случај $\Sigma \neq \emptyset$ -Луцова конструкција

Сада прелазимо на случај када је $\Sigma \neq \emptyset$. По леми 1.4.6 ће Σ бити нека унија кружница $\gamma_i, i \in [1, n]$.

Доказ теореме 2.0.1. Нека је θ произвољна форма конекције на S^1 -главном раслојењу $\pi : E \rightarrow M$ и нека је Ω њој придружена форма кривине. Претпоставимо надаље да смо фиксирали оријентацију на M задату неишчезавајућом 2-формом $v \in \Omega^2(M)$.

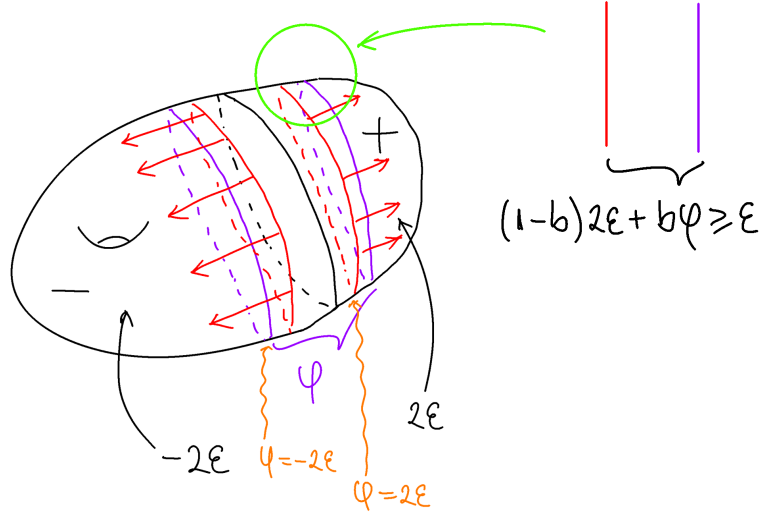
1. Конструкција на околини Σ : Нека је T околина скупа Σ која је дифеоморфна са $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, а која постоји на основу теореме о цевастој околини. Означимо учени дифеоморфизам са $\psi : T \rightarrow \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ и нека је $\pi : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ пројекција на другу координату. Тада се функција $\psi^* \pi$ може продужити до глатке функције φ на M такве да је $|\varphi| \geq \varepsilon$ на $M \setminus T$. Нека је γ_i произвољна кружница за коју ћемо због олакшања записа поистоветити са S^1 и нека је $d\theta \in \Omega^1(S^1)$ генератор прве де Рамове кохомологије $H_{\text{dR}}^1(S^1)$.

Означимо са $\pi_i : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \gamma_i$ пројекцију на кружницу γ_i . Тада видимо да је форма $\pi_i^*(d\theta)$ затворена и да важи $\pi_i^*(d\theta) \wedge d\varphi \neq 0$ на T . Уколико форма $\pi_i^*(d\theta) \wedge d\varphi$ задаје исту оријентацију као ону коју смо фиксирали за M , онда узмимо да је $\beta_0 = \pi_i^*(d\theta)$, док у супротном узимамо $\beta_0 = -\pi_i^*(d\theta)$. Имамо да на $T \setminus \Sigma$ додатно важи

$$d\left(\frac{\beta_0}{\varphi}\right) = \frac{1}{\varphi^2} \beta_0 \wedge d\varphi,$$

на основу затворености форме β_0 .

Нека је $c > 0$ реалан број и нека је T_i цеваста околина кружнице γ_i . Рестрикција диференцијалне форме $\beta_0 \wedge d\varphi$ на отворену подмногострукост T_i ће бити форма запремине, а и више од тога. На основу конструкције форме β_0



Слика 2.1: Продужење функције φ такво да је $|\varphi| \geq \epsilon$ на $M \setminus T$.

видимо да је можемо продужити и до форме на $\bar{T}$ тако да и ту она буде различита од нуле. Ово можемо постићи тако што ћемо ϵ при конструкцији цевасте околине заменити са 2ϵ , те онда посматрати рестрикцију форме $\pm \pi_i^*(d\theta)$ на околину која је дифеоморфна са $T \times (-\epsilon, \epsilon)$.

Уз то, диференцијална форма $d\varphi$ на ∂T се не може анулирати, што ћемо управо доказати.

2. Важи да је $d\varphi|_{\partial T} \neq 0$:

Заиста, уколико бисмо претпоставили супротно, тада би постојала тачка $p \in \partial T$ таква да је $(d\varphi)_p = 0$, што заузврат значи да функција φ достиже локални екстремум у тачки p . Можемо претпоставити да је $\varphi(p) > 0$ јер је анализа у случају $\varphi(p) < 0$ аналогна.

Уколико би се у p достигао локални минимум, то би онда постојала отворена околина U тачке p таква да на њој важи $\varphi|_U \geq \varphi(p)$. Како важи $p \in \partial T$ то је онда $U \cap T \neq \emptyset$, те самим тим постоји тачка $q \in U \cap T$. Како је по конструкцији φ на T таква да узима вредности из интервала $(-\epsilon, \epsilon)$ то значи да је $\varphi(q) < \epsilon$. Са друге стране, на основу дефиниције φ и њене непрекидности добијамо да је $\varphi(p) = \epsilon$. Самим тим добијамо контрадикцију са претпоставком да је p локални минимум функције φ . На сличан начин показујемо да је немогуће да је p локални максимум функције φ , те видимо да је претпоставка да је $(d\varphi)_p = 0$ неодржива. Како смо $p \in \partial T$ бирали произвољно, то видимо

ГЛАВА 2. КОНСТРУКЦИЈА ИНВАРИЈАНТНИХ КОНТАКТНИХ ФОРМИ

да је $(d\varphi)|_{\partial T} \neq 0$.

Поновним продужетком форме β_0 на неку околину скупа $\overline{T}$ као што смо то малочас урадили добијамо да је форма $\beta_0 \wedge d\varphi \neq 0$ на некој отвореној околини скупа $\overline{T}$.

На $T \setminus \Sigma$ имамо да је

$$\Omega + d\left(\frac{c\beta_0}{\varphi}\right) = \Omega + \frac{c}{\varphi^2}\beta_0 \wedge d\varphi.$$

3. Постоји $c > 0$ такво да је $\Omega + \frac{c}{\varphi^2}\beta_0 \wedge d\varphi > 0$ на $T \setminus \Sigma$:

Како је $\beta_0 \wedge d\varphi$ форма запремине на некој отвореној околини W скупа $\overline{T}$, то постоји глатка функција $f \in C^\infty(W)$ таква да је $\Omega = f \cdot \beta_0 \wedge d\varphi$ на отвореној околини W . Како је $|f|$ такође непрекидна функција на компакту $\overline{T} \subseteq W$, то она достиже свој максимум $c_{\max}$ на њему. Поред тога, непрекидна функција $|\varphi|$ достиже свој максимум $d_{\max}$ на M .

Уочимо да сада имамо да је

$$\Omega + \frac{c}{\varphi^2}\beta_0 \wedge d\varphi = \left(f + \frac{c}{\varphi^2}\right) \cdot \beta_0 \wedge d\varphi,$$

те како је $\beta_0 \wedge d\varphi$ форма запремине на $T \setminus \Sigma$, довољно је пронаћи $c > 0$ такво да је $\left|f + \frac{c}{\varphi^2}\right| > 0$ да би ово била једна форма запремине на $T \setminus \Sigma$.

За сваку тачку $p \in T \setminus \Sigma$ имамо да важи

$$\left|f + \frac{c}{\varphi^2}\right| \geq \left|\frac{c}{\varphi^2}\right| - |f| \geq \frac{c}{d_{\max}^2} - c_{\max},$$

где одговарајући максимуми постоје јер је $\overline{T}$ компактан скуп. Тада је за произвољно $c > c_{\max} \cdot d_{\max}^2$ форма $\Omega + \frac{c}{\varphi^2}\beta_0 \wedge d\varphi > 0$ форма запремине на $T \setminus \Sigma$, што завршава овај корак конструкције.

4. Конструкција изван неке околине Σ :

Како је v форма запремине на M то имамо да постоји $f \in C^\infty(M)$ такво да је $\Omega = f \cdot v$. Како је M компактна и $|f|$ непрекидна, то имамо да она достиже максимум $c_{\max}$ на M .

Желимо да пронађемо $c > 0$ такво да је $\Omega + cv$ форма запремине на M која индукује на M исту оријентацију као и форма v . На основу претходног имамо да је

$$\Omega + cv = (f + c)v,$$

те како је v форма запремине на M , то видимо да је довољно пронаћи $c > 0$ такво да је $|f + c| > 0$. На M имамо да важи да је

$$|f + c| \geq c - |f| \geq c - c_{\max}.$$

ГЛАВА 2. КОНСТРУКЦИЈА ИНВАРИЈАНТНИХ КОНТАКТНИХ ФОРМИ

Одавде имамо да ће за произвољно $c > c_{\max}$ важити да је $\Omega + cv > 0$.

Нека је $\varepsilon' < \varepsilon$ и $K = \varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon', \varepsilon'))$. На основу дефиниције φ имамо да је $M \setminus K \subseteq T$. Нека су компоненте повезаности скупа K означене са K_i . Из чињенице да је $\varepsilon' < \varepsilon$ и да је ту φ управо пројекција у карти на T индукованој са $\psi : T \rightarrow \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ имамо да је $d\varphi \neq 0$ на $\varphi^{-1}(\{-\varepsilon', \varepsilon'\})$. Како је уз то φ непрекидно пресликавање, то на основу теореме о рангу имамо да је K подмногострукост са границом.

Како смо нашли $c > 0$ такво да је $\Omega + cv > 0$ на M , то остаје још само да форму cv учинимо тачном. То се на целом M не може постићи, јер је $\int_M cv \neq 0$, али може на погодно изабраним отвореним подскуповима.

Нека је ε'' такво да је $0 < \varepsilon'' < \varepsilon'$ и означимо са

$$V = \{p \in M \mid |\varphi(p)| > \varepsilon''\},$$

отворен скуп који садржи K и који је дисјунктан са Σ . Пошто су K_i дисјунктни компакти садржани у отвореном скупу V , за свако i можемо изабрати повезану отворену околину U_i скупа K_i такву да важи

$$U_i \subseteq V \quad \text{и} \quad U_i \cap U_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

Нека је са $\iota_i : U_i \rightarrow M$ означена инклузија. Рестрикције $\iota_i^* \Omega$ и $\iota_i^*(cv)$ писаћемо и даље са Ω и v_i , јер је из контекста јасно на ком скупу се посматрају. Тада је $\Omega + v_i > 0$ на U_i , дакле $\Omega + v_i$ јесте форма запремине на U_i која задаје исту оријентацију као v .

Свака U_i је отворена повезана површ и важи $U_i \neq M$, јер је $\Sigma \neq \emptyset$, а $U_i \cap \Sigma = \emptyset$. Уз то ће U_i бити некомпактна повезана подмногострукост од M димензије 2, за коју важи

$$H_{dR}^2(U_i; \mathbb{R}) = 0.$$

Одавде видимо да постоји 1-форма β^i на U_i таква да је $d\beta^i = v_i$, одакле

$$\Omega + d\beta^i > 0 \text{ на } U_i.$$

Пошто су скупови U_i дисјунктни, услов $\beta|_{U_i} = \beta^i$, $i = 1, \dots, m$ задаје добро дефинисану 1-форму β на отвореној околини

$$U = \bigcup_{i=1}^m U_i \supseteq K$$

ГЛАВА 2. КОНСТРУКЦИЈА ИНВАРИЈАНТНИХ КОНТАКТНИХ ФОРМИ

за коју важи да је $\Omega + d\beta > 0$ на U . Тражена форма је тада $\beta_1 = \varphi \beta$. Заиста, како је

$$\varphi d\beta_1 + \beta_1 \wedge d\varphi = \varphi d\varphi \wedge \beta + \varphi^2 d\beta - \varphi d\varphi \wedge \beta = \varphi^2 d\beta,$$

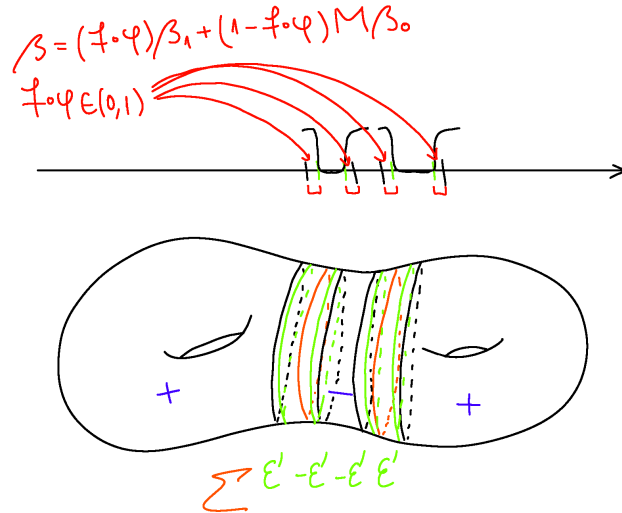
то је

$$\varphi^2 \Omega + \varphi d\beta_1 + \beta_1 \wedge d\varphi = \varphi^2 (\Omega + d\beta) > 0 \text{ на } U,$$

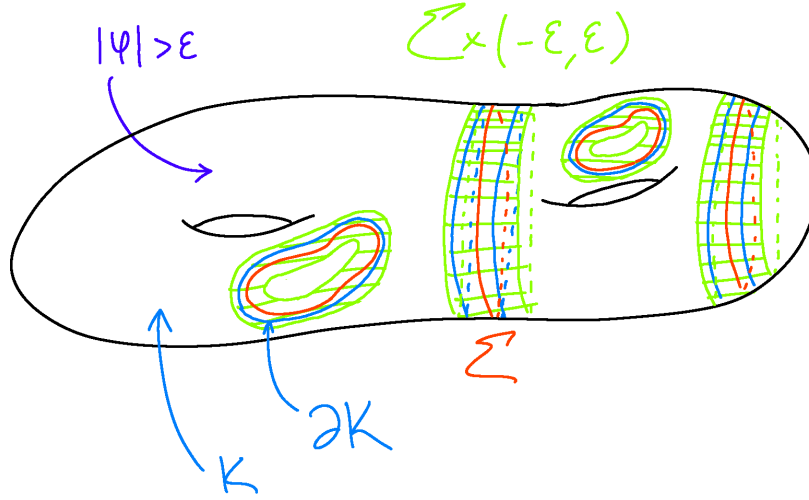
јер је $|\varphi| > \varepsilon''$ на U .

5. Сјајање форми добијених у корацима 3. и 4.: Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ глатка функција таква да је

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{изван скупа } (-\varepsilon, -\varepsilon') \cup (\varepsilon', \varepsilon) \\ f'(t) > 0 & \text{на } (\varepsilon', \varepsilon) \\ f'(t) < 0 & \text{на } (-\varepsilon, -\varepsilon'). \end{cases}$$



Слика 2.2: Конструкција форме β интерполацијом између β_0 и β_1 на цевастим околинама кружница скупа Σ , уз одговарајуће знаке функције φ .



Слика 2.3: Сингуларни скуп Σ , његова цеваста околина $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ и компакт K на чијој је унутрашњости $|\varphi| > \varepsilon$.

На основу конструкције из претходних делова и дефиниције функције f видимо да је инваријантна форма

$$\alpha = \pi^* \varphi \cdot \theta + \pi^* ((f \circ \varphi) \cdot \beta_1 + (1 - f \circ \varphi) \cdot c\beta_0)$$

контактна сем можда на скупу $\pi^{-1}(T \cap K)$. Како је на $\pi^{-1}(T \cap K)$ функција $\pi^* \varphi \neq 0$ јер је $\Sigma \cap K = \emptyset$, то се провера контактнoг услова своди на проверу да је $\Omega + d\left(\frac{\beta}{\varphi}\right) \neq 0$. Директним рачуном добијамо да је

$$\begin{aligned} \Omega + d\left(\frac{\beta}{\varphi}\right) &= (f \circ \varphi) \left(d\left(\frac{\beta_1}{\varphi}\right) + \Omega \right) + (1 - f \circ \varphi) \left(d\left(\frac{c\beta_0}{\varphi}\right) + \Omega \right) + \\ &+ \frac{1}{\varphi} (d(f \circ \varphi) \wedge \beta_1 + d(1 - f \circ \varphi) \wedge c\beta_0). \end{aligned}$$

Приметимо да ће прва два члана задавати форму оријентације која се поклапа са оном коју смо фиксирали на M . Заиста, на $T \cap K$ по пређашњој конструкцији имамо да су форме $\Omega + d\left(\frac{\beta_1}{\varphi}\right)$ и $\Omega + d\left(\frac{c\beta_0}{\varphi}\right)$ форме запремине које одређују исту оријентацију, ону коју смо фиксирали на M , те је таква и њихова конвексна комбинација.

Последња заграда се може средити и добијамо да је

$$\frac{1}{\varphi} (d(f \circ \varphi) \wedge \beta_1 + d(1 - f \circ \varphi) \wedge c\beta_0) = \frac{f' \circ \varphi}{\varphi} (c\beta_0 \wedge d\varphi - \beta_1 \wedge d\varphi).$$

ГЛАВА 2. КОНСТРУКЦИЈА ИНВАРИЈАНТНИХ КОНТАКТНИХ ФОРМИ

Приметимо додатно, како је форма $\beta_0 \wedge d\varphi \neq 0$ на $\overline{T \cap K}$, то у свакој тачки $p \in \overline{T \cap K}$ важи да је $T_p^*M = \mathcal{L}((\beta_0)_p, (d\varphi)_p)$, те форму β_1 на $\overline{T \cap K}$ можемо записати у облику

$$\beta_1 = a \cdot \beta_0 + b \cdot d\varphi,$$

за неке глатке функције $a, b \in \mathcal{C}^\infty(\overline{T \cap K})$. Самим тим на основу антисиметричности клинастог производа добијамо да је

$$\frac{f' \circ \varphi}{\varphi} (c\beta_0 \wedge d\varphi - \beta_1 \wedge d\varphi) = \frac{f' \circ \varphi}{\varphi} (c - a)(\beta_0 \wedge d\varphi).$$

На основу дефиниције f и φ је функција $\frac{f' \circ \varphi}{\varphi} \geq 0$ на $\overline{T \cap K}$. Уз то, функција a је ограничена на компакту $\overline{T \cap K} \subseteq M$ као непрекидна функција. Како је једини услов за c био тај да буде довољно велико тако да $\Omega + \frac{c}{\varphi^2} \beta_0 \wedge d\varphi$ буде форма запремине, то можемо узети c произвољно велико тако да важи $c - a > 0$ на $\overline{T \cap K}$. За тако изабрано c добијамо позитивност и задње заграде, што завршава доказ. $\square$

Приметимо још да ће оријентација форме α бити у потпуности одређена оријентацијом M коју смо фиксирали на почетку. На тај начин теорема даје две инваријантне контактне форме са истим сингуларним скупом кружница које ће бити супротних оријентација.

Уз то, како конструкција функције φ није била условљена одабиром оријентације M , то ће компоненте повезаности $M \setminus \Sigma$ обеју ових форми бити означене истим знаковима $+$ и $-$.

Глава 3

Еквиваријантна класификација

У претходном поглављу смо кренули од произвољног S^1 —главног раслојења $\pi : E \rightarrow M$, где смо за E и M претпоставили да су затворене и оријентабилне многострукости димензија 3 и 2 редом. Потом смо видели да за произвољан коначни скуп дисјунктних кружница $\Sigma \subseteq M$ који задовољава услов знака 1.4.8 можемо конструисати инваријантну контактну форму на E такву да је њен сингуларни скуп управо Σ , што је био садржај теореме 2.0.1.

Природно је поставити питање да ли за фиксирано S^1 —главно раслојење $\pi : E \rightarrow M$ и фиксирано Σ у M можемо добити две разне инваријантне контактне структуре на E . Одговор на ово питање ће бити негативан, што је садржина теореме 3.2.1.

3.1 Појам еквиваријантне контактоморфности

Дефиниција 3.1.1. Нека је E затворена многострукост са придруженим S^1 дејством. За дифеоморфизам $f \in \text{Diff}(E)$ кажемо да је *еквиваријантан* уколико важи $f \circ \varphi^t = \varphi^t \circ f$, где је $\{\varphi^t\}_{t \in S^1} \subseteq \text{Diff}(E)$ једнопараметарска група дифеоморфизама придружена S^1 дејству.

Скуп свих еквиваријантних дифеоморфизама на E ћемо означавати са $\text{Diff}_{S^1}(E)$. Приметимо да ће ово бити једна подгрупа од $\text{Diff}(E)$.

Дефиниција 3.1.2. Нека је E затворена контактна многострукост са придруженим S^1 дејством и нека су $\alpha_0, \alpha_1 \in \Omega^1(E)$ инваријантне контактне форме

на E . За α_0 и α_1 кажемо да су *еквиваријантно контактоморфне* уколико постоји еквиваријантни дифеоморфизам $f \in \text{Diff}_{S^1}(E)$ који је уједно и контактоморфизам.

Наредна лема ће бити карактеризација еквиваријантне контактоморфности.

Лема 3.1.3. *Контактне форме α_0 и α_1 на E су еквиваријантно контактоморфне ако и само ако постоји $f \in \text{Diff}_{S^1}(E)$ такав да важи $f^*\alpha_0 \wedge \alpha_1 = 0$.*

Доказ. ($\Rightarrow$) Како су по претпоставци α_0 и α_1 контактоморфне, то основу леме 1.1.6 видимо да ће важити $f^*\alpha_0 \wedge \alpha_1 = 0$. Уз то је по претпоставци f еквиваријантни дифеоморфизам, те ово завршава доказ овог смера.

($\Leftarrow$) Нека је дат еквиваријантни дифеоморфизам $f \in \text{Diff}_{S^1}(E)$ такав да је $f^*\alpha_0 \wedge \alpha_1 = 0$. На основу леме 1.1.6 имамо да је f један контактоморфизам. Како је уз то f еквиваријантан, то имамо тражено тврђење. □

Нека су α_0 и α_1 еквиваријантно контактоморфне. По претходној лем и лем 1.1.4 имамо да постоји неистезавајућа функција $\mu \in C^\infty(E)$ таква да је $f^*\alpha_0 = \mu \cdot \alpha_1$. На основу еквиваријантности f и инваријантности форми α_0 и α_1 може се закључити да је μ инваријантна, односно да важи $\mu \in C^\infty_{S^1}(E)$.

Дефиниција 3.1.4. Нека су α_0 и α_1 инваријантне контактне форме на M . Кажемо да су оне *еквиваријантно изотопне* уколико постоји изотопија $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$ таква да је $H_0 = \text{id}_M$ и за свако $t \in [0, 1]$ је H_t еквиваријантни контактоморфизам.

Уочимо да ће временски зависно векторско поље X_t које је генерисано са $\frac{dH_t}{dt} = X_t \circ H_t$ комутирати са векторским пољем придруженим S^1 дејству X што следи из чињенице да токови φ^s и H_t комутирају на основу еквиваријантности H_t .

Лема 3.1.5. *Нека је дато S^1 -главно раслојење $\pi : E \rightarrow M$ и $\alpha \in \Omega^1(E)$ произвољна инваријантна контактна форма на E . Тада је $[X, R_\alpha] = 0$.*

Доказ. Нека је α произвољна инваријантна контактна форма на E и R_α њој придружено Ребово векторско поље. Желимо да покажемо да ће за свако

$s \in \mathbb{R}$ векторско поље $\varphi_*^s R_\alpha$ бити Ребово векторско поље. Тада ћемо на основу дефиниције Лијевог извода добити да је $[X, R_\alpha] = 0$. Како за $\varphi_*^s R_\alpha$ важи да је

$$\alpha(\varphi_*^s R_\alpha) = (\varphi^s)^* \alpha(R_\alpha) = \alpha(R_\alpha) = 1,$$

као и

$$\iota_{\varphi_*^s R_\alpha} d\alpha = d\alpha(\varphi_*^s R_\alpha, -) = (\varphi^s)^* (\iota_{R_\alpha} d\alpha) = 0,$$

то видимо да је R_α инваријантно у односу на S^1 дејство на основу јединствености Ребовог векторског поља, односно да је $[X, R_\alpha] = 0$. $\square$

Став 3.1.6. *Нека су α_0 и α_1 две инваријантне контактне форме на M . Уколико су α_0 и α_1 довољно близу у смислу јаке Вишњијеве $\mathcal{C}^1$ топологије онда су оне еквиваријантно контактоморфне.*

Доказ. На основу става 1.1.11 и Грејеве стабилности важи да су α_0 и α_1 контактоморфне. Остало је још да покажемо да је добијени контактоморфизам еквиваријантан. Временски зависно векторско поље из доказа Грејеве стабилности смо јединствено дефинисали условима да је

1. $\alpha_t(X_t) = 0$
2. $\iota_{X_t} d\alpha_t = -\dot{\alpha}_t + \mu_t \alpha_t,$

где је $\mu_t = \dot{\alpha}_t(R_{\alpha_t})$. Директном провером се добија да $\varphi_*^s X_t$ задовољавају све исте услове, те добијамо да је временски зависно векторско поље X_t инваријантно у односу на S^1 дејство.

Интеграљењем X_t да бисмо добили $h_t : M \rightarrow M$, односно решавањем диференцијалне једначине

$$\frac{dh_t}{dt} = X_t \circ h_t, \quad h_0 = \text{id}_M,$$

видимо да је $h_t \circ \varphi^s = \varphi^s \circ h_t$, односно да је добијена изотопија еквиваријантна, што је и требало доказати. $\square$

Наредна лема ће нам показати да тачке $p \in E$ у којима фамилија α_t контактних форми константна се неће кретати приликом изотопије из претходне леме.

Лема 3.1.7. *Нека је X_t временски зависно векторско поље добијено из доказа Грејеве стабилности. Уколико постоји тачка $p \in E$ таква да је за $t \in [0, 1]$ $(\alpha_t)_p = (\alpha_0)_p$, тада је $(X_t)_p = 0$. Уколико је h_t изотопија добијена интеграцијом $\frac{dh_t}{dt} = X_t \circ h_t$, тада је за свако $t \in [0, 1]$ $h_t(p) = p$.*

Доказ. Претпоставимо да постоји тачка $p \in E$ таква да је $(\alpha_t)_p = (\alpha_0)_p$ за свако $t \in [0, 1]$. Диференцирањем $(\alpha_t)_p$ по t добијамо да је $(\dot{\alpha}_t)_p = 0$.

Векторско поље добијено из Грејеве стабилности X_t је одређено условима

1. $\alpha_t(X_t) = 0$,
2. $\iota_{X_t} d\alpha_t = -\dot{\alpha}_t + \mu_t \alpha_t$,

где је $\mu_t: E \rightarrow \mathbb{R}$ пресликавање дато са $(\mu_t)_p = (\dot{\alpha}_t)_p(R_{\alpha_t})$.

Тада добијамо да је за $p \in E$ такво да је $(\alpha_t)_p = (\alpha_0)_p$ за свако $t \in [0, 1]$

$$(\mu_t)_p = (\dot{\alpha}_t)_p(R_{\alpha_t}) = 0.$$

Такође имамо да је

$$(\iota_{X_t} d\alpha_t)_p = -(\dot{\alpha}_t)_p + (\mu_t)_p(\alpha_t)_p = 0 + 0 = 0.$$

Како је свака форма α_t по претпоставкама теореме о Грејевој стабилности контактна, то имамо да је за свако $t \in [0, 1]$ $\alpha_t \wedge d\alpha_t \neq 0$ на E . Са друге стране имамо да је

$$(\iota_{X_t}(\alpha_t \wedge d\alpha_t))_p = (\alpha_t(X_t))_p d\alpha_t - (\alpha_t)_p \wedge (\iota_{X_t} d\alpha_t)_p = 0.$$

Ово значи да је $(X_t)_p = 0$ за свако $t \in [0, 1]$. Уз то, како је решење диференцијалне једначине

$$\frac{d}{dt} h_t(p) = X_t \circ h_t(p), \quad h_0(p) = p$$

јединствено и како је константна крива p њено решење, то добијамо да је за $h_t(p) = p$ свако $t \in [0, 1]$. □

Став 3.1.8. *Нека су α_0 и α_1 регуларне инваријантне контактне форме на M . Тада су оне еквиваријантно контактноморфне дифеоморфизмом који чува оријентацију.*

Доказ. Како су форме α_0 и α_1 регуларне, то следи да је $\Sigma_0 = \Sigma_1 = \emptyset$. Самим тим, добро су дефинисане форме $\frac{\alpha_0}{\alpha_0(X)}$ и $\frac{\alpha_1}{\alpha_1(X)}$. На основу инваријантности α_i и $\alpha_i(X)$ за $i \in \{0, 1\}$ добијамо да су $\frac{\alpha_i}{\alpha_i(X)}$ контактне форме конекције на тоталном простору раслојења $\pi : E \rightarrow M$. На основу теореме 1.3.5 имамо да су форме кривине $\Omega_0, \Omega_1 \in \Omega^2(M)$ од $\frac{\alpha_0}{\alpha_0(X)}$ и $\frac{\alpha_1}{\alpha_1(X)}$ редом у истој кохомолошкој класи у $H_{\text{dR}}^2(M)$.

Поред тога, на основу чињенице да су $\frac{\alpha_0}{\alpha_0(X)}$ и $\frac{\alpha_1}{\alpha_1(X)}$ контактне форме имамо да су Ω_0 и Ω_1 форме запремине на M . Како оне одређују исту кохомолошку класу, то ће и оријентације које оне задају на M бити исте. Самим тим добијамо да ће за $t \in [0, 1]$ форме

$$\Omega_t = (1 - t) \cdot \Omega_0 + t \cdot \Omega_1$$

задавати форме оријентације на M .

Нека је сада

$$\theta_t = (1 - t) \cdot \frac{\alpha_0}{\alpha_0(X)} + t \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1(X)}, \quad t \in [0, 1],$$

фамилија диференцијалних 1-форми на E . Како је свака форма θ_t конвексна комбинација форми конекције на E , то ће свака од њих такође бити форма конекције на E .

На основу $\mathbb{R}$ -линеарности диференцијала и π^* добијамо да је Ω_t управо форма кривине форме конекције θ_t . Како је свака од форми θ_t инваријантна и $\theta_t(X) = 1$, то на основу леме 1.4.5 имамо да се провера контактнoг услова за θ_t своди на испитивање да ли постоји диференцијална 1-форма $\beta_t \in \Omega^1(M)$ таква да је $\Omega_t + d\beta_t \neq 0$.

Са друге стране, приметимо да како важи да је $[\Omega_0] = [\Omega_1]$, то имамо да је $[\Omega_t] = [\Omega_0]$ за свако $t \in [0, 1]$, одакле одмах добијамо да је $\Omega_0 = \Omega_t + d\beta_t$ за неко $\beta_t \in \Omega^1(M)$. Како је Ω_0 форма запремине на M , то добијамо да је θ_t контактна форма.

На основу еквиваријантне верзије Грејеве стабилности добијамо да постоји тражена изотопија, што завршава доказ. □

Став 3.1.9. *Нека је да̇то S^1 главно раслојење $\pi : E \rightarrow M$ и $\alpha_0, \alpha_1 \in \Omega^1(E)$ инваријантне контактне форме на E које су еквиваријантно контактноморфне. Тада су њихови сингуларни скупови дифеоморфни.*

Доказ. Уколико су α_0 и α_1 две еквиваријантно контактоморфне контактне форме на E , то постоје $f \in \text{Diff}_{S^1}(E)$ и $\mu \in \mathcal{C}_{S^1}^\infty(E)$ такве да важи $f^*\alpha_0 = \mu\alpha_1$. Уколико је X векторско поље придружено S^1 дејству и $p \in E$ произвољна тачка многострукости, то имамо да важи

$$\alpha_0(X)_p = \alpha_0(f_*X)_{f(p)} = \mu(p) \cdot \alpha_1(X)_p.$$

Прва једнакост ће важити јер је f еквиваријантни дифеоморфизам. Одавде видимо да уколико је $p \in \pi^{-1}(\Sigma_0)$ тада важи да је $f(p) \in \pi^{-1}(\Sigma_1)$, као и обротно, што је и требало доказати. □

3.2 Формулација и доказ теореме 3.2.1

Надаље желимо да упоредимо две инваријантне контактне форме такве да постоји еквиваријантни дифеоморфизам који ће сингуларни скуп $\pi^{-1}(\Sigma_0)$ сликати у сингуларни скуп $\pi^{-1}(\Sigma_1)$. По претходној дискусији видимо да је то могуће ако и само ако је $\pi^{-1}(\Sigma_0) \approx \pi^{-1}(\Sigma_1)$.

Теорема 3.2.1. *Нека су α_0 и α_1 две инваријантне контактне форме на S^1 главном раслојењу $\pi : E \rightarrow M$ са истим сингуларним скупом Σ и исте оријентације. Тада постоји еквиваријантан дифеоморфизам $f \in \text{Diff}_{S^1}(E)$ са следећим својствима:*

1. f чува оријентацију од E
2. f је изотопан са id_E
3. $f \circ \pi^{-1}(\Sigma) = \pi^{-1}(\Sigma)$
4. f је контактноморфизам форми α_0 и α_1 .

Доказ. Доказ желимо да спроведемо у три етапе. Најпре ћемо модификовати нашу полазну контактну форму α_0 на сингуларном скупу Σ да бисмо добили исте $\pi^*\beta_0$ и $\pi^*\beta_1$ за α_0 и α_1 . Потом модификујемо нашу контактну форму на некој отвореној околини $\pi^{-1}(\Sigma)$ и на крају на целом E , што ће комплетирати доказ.

1. Модификовање форме α_1 на $\pi^{-1}(\Sigma)$:

Циљ овог корака је да, након замене форме α_1 погодним позитивним умношком, конструишемо еквиваријантни дифеоморфизам h_1 за који важи $h_1^* \alpha_0 = \alpha_1$ на $\pi^{-1}(\Sigma)$.

1.1. Поређење функција φ_0 и φ_1 :

Нека је X векторско поље придружено S^1 дејству и нека су $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{C}_{S^1}^\infty(E)$ дефинисане са $\varphi_i = \alpha_i(X), i \in \{0, 1\}$. По претходном знамо да ће једна од функција φ_1 и $-\varphi_1$ ће бити истог знака као и функција φ_0 . Желимо да променимо знак φ_1 тако да се поклапа са оним од φ_0 и то је могуће постићи без промене оријентације α_1 , узевши уместо ње форму $-\alpha_1$. Овај корак ће нам бити неопходан зато да бисмо у наредном кораку добили да је функција b коју касније дефинишемо строго позитивна.

За функције φ_0 и φ_1 тада важи да постоји $\mu \in \mathcal{C}^\infty(M), \mu > 0$ таква да је $\varphi_1 = \mu\varphi_0$. Диференцирањем овог израза добијамо да је $d\varphi_1 = \mu d\varphi_0 + \varphi_0 d\mu$, што на Σ даје $d\varphi_1 = \mu d\varphi_0$. На основу леме 1.4.5 добијамо да је за одговарајућу оријентацију M $\beta_i \wedge d\varphi_i > 0$ за $i \in \{0, 1\}$.

1.2. Разлајање $\beta_1 = a \cdot d\varphi_0 + b \cdot \beta_0$:

Пошто β_0 и $d\varphi_0$ разлапају котангентни простор близу Σ , форму β_1 можемо разложити по њима; остатак корака показује да је коефицијент b строго позитиван, што нам је неопходно из два разлога.

Прво, за b је неопходно буде различито од нуле јер желимо да функцијом $\frac{1}{\pi^*b}$ рескалирамо форму α_1 да бисмо добили касније еквиваријантну изотопију између следећих форми

$$\alpha_1 \rightarrow \frac{\alpha_1}{\pi^*b}.$$

Друго, неопходно је да функција буде строго позитивна јер ћемо желети да покажемо да је свака од форми

$$\alpha_t = (1 - t) \cdot \alpha_1 + \frac{t}{\pi^*b} \alpha_1$$

контактна. Тада ћемо на основу еквиваријантне верзије Грејеве стабилности добити тражену изотопију и моћи да заменимо форму α_1 формом $\frac{\alpha_1}{\pi^*b}$ која ће нам бити погоднија за даљи рад.

Важи да је $\beta_i \wedge d\varphi_i > 0$ на некој отвореној околини W од Σ на основу непрекидности β_i и $d\varphi_i$, као и чињенице да је $\beta_i \wedge d\varphi_i > 0$ на $\pi^{-1}(\Sigma)$. Специјално важи да ће у свакој тачки $p \in W$ диференцијалне форме $(\beta_0)_p$ и $(d\varphi_0)_p$ разлапати цело T_p^*M . Одавде имамо да постоје глатке функције $a, b \in \mathcal{C}^\infty(W)$

такве да је

$$\beta_1 = a \cdot d\varphi_0 + b \cdot \beta_0$$

на W . Како је W отворена околина, слободно можемо претпоставити да су $a, b \in C^\infty(M)$.

1.3. Важи да је $b > 0$: Како је функција $\mu > 0$, то имамо да на Σ важи да је $b > 0$, јер бисмо у супротном из $\beta_1 = a \cdot d\varphi_0 + b \cdot \beta_0$ клиновањем са $d\varphi_0$ са десне стране па потоњим множењем са μ добили да је

$$\beta_1 \wedge d\varphi_1 = \mu \beta_1 \wedge d\varphi_0 = \mu b \cdot \beta_0 \wedge d\varphi_0,$$

што на Σ даје $\beta_1 \wedge d\varphi_1 = \mu b \cdot \beta_0 \wedge d\varphi_0$.

Уколико би постојала тачка $p \in \Sigma$ таква да је $b(p) = 0$, тада би важило да је $(\beta_1 \wedge d\varphi_1)_p = 0$, што је у контрадикцији са чињеницом да α_1 испуњава контактни услов на $\pi^{-1}(\Sigma)$.

Уколико би пак важило да постоји тачка $p \in \Sigma$ таква да је $b(p) < 0$, онда бисмо имали да форме $\beta_0 \wedge d\varphi_0$ и $\beta_1 \wedge d\varphi_1$ задају супротне оријентације на Σ јер је $\mu(p) > 0$ по претпоставци, што је контрадикција са претпоставком о оријентацијама форми α_0 и α_1 .

Дакле имамо да важи да је $b > 0$ на Σ , те специјално на основу непрекидности b ово важи и на некој околини скупа Σ .

Без умањења општости можемо сматрати да је $b > 0$ на W , иначе W мењамо отвореном подоколином $W \cap \{b > 0\}$. Функцију b тада можемо продужити до позитивне функције на M .

1.4. Конструкција еквиваријантне изотопије између форми α_1 и $\frac{\alpha_1}{\pi^*b}$:

Дељењем са π^*b ћемо постићи да важи $b \equiv 1$; проверавамо да тако добијена форма остаје инваријантна и контактна. Потом посматрамо шта се дешава са њеним хоризонталним делом β .

Како важи да је

$$\mathcal{L}_X \frac{\alpha_1}{\pi^*b} = \frac{1}{\pi^*b} \mathcal{L}_X \alpha_1 - \frac{X(\pi^*b)}{(\pi^*b)^2} \alpha_1 = 0$$

и како је

$$\frac{\alpha_1}{\pi^*b} \wedge d\left(\frac{\alpha_1}{\pi^*b}\right) = \frac{1}{\pi^*b} (-\alpha_1 \wedge \frac{d(\pi^*b)}{(\pi^*b)^2} \wedge \alpha_1 + \frac{1}{\pi^*b} \alpha_1 \wedge d\alpha_1) = \frac{1}{(\pi^*b)^2} \alpha_1 \wedge d\alpha_1,$$

то је $\frac{\alpha_1}{\pi^*b}$ једна инваријантна контактна форма.

За њу имамо да важи да је $\frac{\alpha_1}{\pi^*b} = \frac{\alpha_1(X)}{\pi^*b}\theta + \pi^*\left(\frac{\beta_1}{b}\right)$, а такође видимо да је на W

$$\frac{\beta_1}{b} = \frac{a}{b} \cdot \beta_0 + d\varphi_0.$$

Самим тим, без умањења општости, нашу анализу можемо свести на случај када је $\beta_1 = a \cdot d\varphi_0 + \beta_0$ на некој околини Σ , што ћемо управо и доказати.

Најзад конструиштемo изотопију $\alpha_1 \rightarrow \frac{\alpha_1}{\pi^*b}$. Ово радимо са намером да модификујемо хоризонтални део β_1 форме α_1 како бисмо касније лакше конструисали изотопију $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1$.

Конструкција изотопије:

Желимо да покажемо да је за свако $t \in [0, 1]$ форма

$$\alpha_t = (1 - t) \cdot \alpha_1 + t \cdot \frac{1}{\pi^*b} \alpha_1$$

контактна. Директним рачуном добијамо да је

$$d\alpha_t = (1 - t) d\alpha_1 + \left(-\frac{t}{(\pi^*b)^2} d(\pi^*b) \wedge \alpha_1 + \frac{t}{\pi^*b} d\alpha_1 \right),$$

одакле имамо да је

$$\alpha_t \wedge d\alpha_t = \left((1 - t)^2 + \frac{2t(1 - t)}{\pi^*b} + \frac{t^2}{(\pi^*b)^2} \right) \alpha_1 \wedge d\alpha_1.$$

Како је форма α_1 по претпоставци контактна, то је α_t форма контактна на E ако и само ако је

$$(1 - t)^2 + \frac{2t(1 - t)}{\pi^*b} + \frac{t^2}{(\pi^*b)^2} \neq 0,$$

што очигледно важи. Одавде добијамо да је свака форма α_t контактна, одакле применом еквиваријантне верзије Грејеве стабилности добијамо еквиваријантну изотопију између форми α_1 и $\frac{\alpha_1}{\pi^*b}$, што је и требало доказати.

1.5. Конструкција еквиваријантне изотопије h_t такве да је $h_1^*\alpha_0 = \alpha_1$:

До сада смо показали да за хоризонтални део форме α_1 на скупу $\pi^{-1}(\Sigma)$ можемо претпоставити да је облика $\beta_1 = \beta_0 + a \cdot d\varphi_0$. Сада желимо да конструишемо еквиваријантну изотопију која ће модификовати β_0 до β_1 на Σ . За то ће нам бити потребна нека једнопараметарска фамилија дифеоморфизама коју ћемо конструисати уз помоћ векторског поља које ћемо управо дефинисати.

1.5.1. Дефиниција векторског поља Y и његове особине: Нека је Y векторско поље дефинисано на некој отвореној подоколини од $\pi^{-1}(\Sigma) \subseteq \pi^{-1}(W)$ условима:

1. $\alpha_0(Y) = 1$
2. $Y(\alpha_0(X)) = 0$
3. $\theta(Y) = 0$.

За тражено векторско поље Y можемо узети

$$Y = \frac{R_{\alpha_0} - \theta(R_{\alpha_0})X}{1 - \theta(R_{\alpha_0})\alpha_0(X)},$$

што је добро дефинисано јер је $1 - \theta(R_{\alpha_0})\alpha_0(X) > 0$ на $\pi^{-1}(\Sigma)$, па и на некој његовој околини. Јасно се види да векторско поље Y испуњава својства 1 и 3.

На основу леме 3.1.5 и чињенице да је

$$\mathcal{L}_{R_{\alpha_0}}\alpha_0 = \iota_{R_{\alpha_0}}d\alpha_0 = 0,$$

имамо да је

$$R_{\alpha_0}(\alpha_0(X)) = (\mathcal{L}_{R_{\alpha_0}}\alpha_0)(X) + \alpha_0([R_{\alpha_0}, X]) = 0.$$

По леми 1.4.2 имамо да је $X(\alpha_0(X)) = 0$, те векторско поље Y задовољава и својство 2.

Једна од особина коју желимо да Y има ће бити та да комутира са током векторског поља X . Ово нам је неопходно да бисмо обезбедили да је изотопија коју конструишемо еквиваријантна.

Ово желимо да покажемо тако што ћемо показати да је комутатор $[X, Y] = 0$. Како он живи на 3-многострукости E , то је довољно да покажемо да постоје три линеарно независне 1-диференцијалне форме које анулирају $[X, Y]$. $\alpha_0, d(\alpha_0(X))$ и θ су линеарно независне: Приметимо да су диференцијалне 1-форме $\alpha_0, d(\alpha_0(X))$ и θ линеарно независне у свакој тачки $\pi^{-1}(\Sigma)$, те и на некој њеној околини. Наиме, видимо да је

$$\theta \wedge \alpha_0 \wedge d(\alpha_0(X)) = \theta \wedge (\pi^*\varphi_0 \cdot \theta + \pi^*\beta_0) \wedge \pi^*d\varphi_0 = \theta \wedge \pi^*(\beta_0 \wedge d\varphi_0),$$

за шта знамо да је различито од нуле на $\pi^{-1}(\Sigma)$ на основу леме 1.4.5. Како је добијена форма форма запремине на $\pi^{-1}(\Sigma)$ по леми 1.4.5, то је она форма запремине и на некој отвореној околини скупа $\pi^{-1}(\Sigma)$, што управо доказује линеарну независност горе поменутих форми.

Надаље претпостављамо да је околина $\pi^{-1}(W)$ скупа $\pi^{-1}(\Sigma)$ изабрана иако да је векторско поље Y на њој добро дефинисано и да су диференцијалне форме θ , $d(\alpha_0(X))$ и α_0 на њој линеарно независне иако и иако.

Важно да је $[X, Y] = 0$: Из услова 1. и 3. дефиниције векторског поља Y при меном Лијевог извода по X видимо да је

$$\mathcal{L}_X(\alpha_0(Y)) = \alpha_0([X, Y]) = 0$$

и

$$\mathcal{L}_X(\theta(Y)) = \theta([X, Y]) = 0,$$

док из услова 2. имамо да је

$$d(\alpha_0(X))[X, Y] = [X, Y]\alpha_0(X) = X(Y(\alpha_0(X))) - Y(X(\alpha_0(X))) = 0,$$

те на основу линеарне независности α_0 , θ и $d(\alpha_0(X))$ закључујемо да је $[X, Y] = 0$.

1.5.2. Конструкција изотопије h_t :

Поље Y је дефинисано само близу $\pi^{-1}(\Sigma)$, па га желимо продужити на цело E . Желимо да нам изотопија h_t модификује форму α_0 само на некој околини скупа $\pi^{-1}(\Sigma)$ и то баш тако да се на скупу $\pi^{-1}(\Sigma)$ форма α_0 еквиваријантно изотопно помери до форме α_1 . Стога ћемо векторско поље Y описано у претходном кораку помножити неком функцијом извочења која је подржана на некој околини скупа $\pi^{-1}(\Sigma)$, док је на $\pi^{-1}(\Sigma)$ једнака 1.

Нека је W' отворена околина од Σ садржана у W и $f \in C^\infty(M)$ таква да је $\text{supp } f \subseteq W'$ и $f = 1$ на тој околини. Видимо да ће се векторско поље $\tilde{Y} = (\pi^*f)Y$ поклапати на некој околини $\pi^{-1}(\Sigma)$ са Y , као и да је $[X, \tilde{Y}] = X(\pi^*f) \cdot Y + (\pi^*f)[X, Y] = 0$, па ће ток векторског поља $\tilde{Y}$, у ознаци $\rho^t(p)$, комутирати са током векторског поља придруженог S^1 дејству.

Нека је за $t \in [0, 1]$ пресликавање $h_t : E \rightarrow E$ дефинисано са

$$h_t(p) = \begin{cases} \rho^{t(\pi^*f \cdot \alpha_0(X))(p)}(p), & p \in \pi^{-1}(W), \\ p, & p \in E \setminus \pi^{-1}(W'). \end{cases}$$

Добра дефинисаност h_t се рутински проверава. Како знамо да је $[X, \tilde{Y}] = 0$, то важи $h_t \circ \varphi^s = \varphi^s \circ h_t$ за све $s, t \in \mathbb{R}$. За $p \in \pi^{-1}(\Sigma)$ имамо да важи $h_t(p) = \rho^{t(\pi^*f \cdot \alpha_0(X))(p)}(p) = \rho^0(p) = p$.

$h_1^* \alpha_0 = \alpha_1$ на $\pi^{-1}(\Sigma)$:

Сада желимо да израчунамо диференцијал пресликавања h_t у тачки $p \in \pi^{-1}(\Sigma)$ да бисмо израчунали $(h_1^* \alpha_0)_p$ за $p \in \pi^{-1}(\Sigma)$ и показали да ће заиста бити $(h_1^* \alpha_0)_p = (\alpha_1)_{h_1(p)} = (\alpha_1)_p$, где последње важи јер за $p \in \pi^{-1}(\Sigma)$ и $t = 1$ имамо да је $\alpha_0(X)_p = 0$, те је

$$h_1(p) = \rho^{1 \cdot (\pi^* a(p) \cdot 0)}(p) = \rho^0(p) = p.$$

Последња једнакост важи јер је $\rho : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ ток векторског поља $\tilde{Y}$.

Пресликавање $h_t : E \rightarrow E$ на $\pi^{-1}(W) \subseteq E$ видимо као композицију пресликавања $\rho : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ и пресликавања

$$G : \pi^{-1}(W) \rightarrow E \times \mathbb{R} : p \mapsto (p, t(\alpha_0(X) \cdot \pi^* a)(p)).$$

На основу ланчастог правила имамо да је

$$(dh_t)_p = (d(\rho \circ G))_p = (d\rho)_{G(p)} \circ (dG)_p = (d\rho)_{(p, t(\alpha_0(X) \cdot \pi^* a)(p))} \circ (dG)_p.$$

За ток $\rho : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ векторског поља $\tilde{Y}$ имамо да је

$$(d\rho)_{(p,t)} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} \rho^s(p) + (d\rho^t)_p = \tilde{Y} \circ \rho^t(p) + (d\rho^t)_p.$$

За пресликавање $G : \pi^{-1}(W) \rightarrow E \times \mathbb{R}$ имамо да је

$$(dG)_p = (t d(\alpha_0(X) \cdot \pi^* a)_p, \text{id}_{T_p E}).$$

Комбинујући претходно добијамо да је

$$\begin{aligned} (dh_t)_p &= (d\rho)_{(p, t(\alpha_0(X) \cdot \pi^* a)(p))} \cdot (dG)_p \\ &= \tilde{Y} \circ \rho^{t(\alpha_0(X) \cdot \pi^* a)(p)}(p) \cdot (t(d(\pi^* a \cdot \alpha_0(X)))_p) + (d\rho^{t(\alpha_0(X) \cdot \pi^* a)(p)})_p, \end{aligned}$$

за све $p \in \pi^{-1}(W)$. Напоменимо да је у претходном изразу множење између $\tilde{Y} \circ \rho^{t(\alpha_0(X) \cdot \pi^* a)(p)}(p)$ и $t(d(\pi^* a \cdot \alpha_0(X)))_p$ обично скаларно множење.

Желимо да израчунамо $(h_1^* \alpha_0)_p$ за $p \in \pi^{-1}(\Sigma)$. Директно добијамо да је

$$(h_1^* \alpha_0)_p = \alpha_0(X)_{h_1(p)} \theta_{h_1(p)} \circ (dh_1)_p + (\pi^* \beta_0)_{h_1(p)} \circ (dh_1)_p.$$

Како важи да је $h_1(p) = p$ и $p \in \pi^{-1}(\Sigma)$, то имамо да је

$$\begin{aligned} (h_1^* \alpha_0)_p &= \alpha_0(X)_p \theta_{h_1(p)} \circ (dh_1)_p + (\pi^* \beta_0)_p \circ (dh_1)_p \\ &= 0 \cdot \theta_{h_1(p)} \circ (dh_1)_p + (\pi^* \beta_0)_p \circ (dh_1)_p = (\pi^* \beta_0)_p \circ (dh_1)_p. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Остаје још да израчунамо вредност израза

$$(\pi^* \beta_0)_p \circ (dh_1)_p = (\pi^* \beta_0)_p \left(\tilde{Y} \circ \rho^{t(\alpha_0(X) \cdot \pi^* a)(p)}(p) \cdot (t(d(\pi^* a \cdot \alpha_0(X))))_p \right) + (d\rho^{t(\alpha_0(X) \cdot \pi^* a)(p)})_p.$$

Како је $p \in \pi^{-1}(\Sigma)$, то је $\alpha_0(X)(p) = 0$, па је и

$$(d\rho^{t(\alpha_0(X) \cdot \pi^* a)(p)})_p = (d\rho^0)_p = \text{id}_{T_p E}$$

па је и

$$(\pi^* \beta_0)_p \circ (d\rho^{t(\alpha_0(X) \cdot \pi^* a)(p)})_p = (\pi^* \beta_0)_p \circ \text{id}_{T_p E} = (\pi^* \beta_0)_p. \quad (3.2)$$

Са друге стране имамо да је по дефиницији векторског поља $\tilde{Y}$ $\alpha_0(\tilde{Y}) = 1$, па како је такође по дефиницији векторског поља $\tilde{Y}$ $\theta(\tilde{Y}) = 0$, то имамо да је

$$1 = \alpha_0(\tilde{Y}) = \alpha_0(X)\theta(\tilde{Y}) + (\pi^* \beta_0)(\tilde{Y}) = 0 + (\pi^* \beta_0)(\tilde{Y}) = \pi^* \beta_0(\tilde{Y}).$$

Заједно са претходним добијамо да је

$$\begin{aligned} (\pi^* \beta_0)_p \circ (dh_1)_p &= (\pi^* \beta_0)_p \left(\tilde{Y} \circ \rho^{t(\alpha_0(X) \cdot \pi^* a)(p)}(p) \cdot (t(d(\pi^* a \cdot \alpha_0(X))))_p \right) \\ &= (d(\pi^* a \cdot \alpha_0(X)))_p. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Узимајући у обзир да је $p \in \pi^{-1}(\Sigma)$ имамо да је

$$(d(\pi^* a \cdot \alpha_0(X)))_p = \alpha_0(X)_p \cdot \pi^* da + \pi^* a(p) \cdot (d(\alpha_0(X)))_p = \pi^*(a d\varphi_0). \quad (3.4)$$

Узимајући у обзир једначине (3.1), (3.2), (3.3) и (3.4) коначно добијамо да је

$$\begin{aligned} (h_1^* \alpha_0)_p &= (\pi^* \beta_0)_p \circ (dh_1)_p \\ &= (\pi^* \beta_0)_p \left(\tilde{Y} \circ \rho^{(\alpha_0(X) \cdot \pi^* a)(p)}(p) \cdot (d(\pi^* a \cdot \alpha_0(X)))_p \right) + \pi^* \beta_0 \circ \text{id}_{T_p E} \\ &= \pi^*(\beta_0 + a d\varphi_0), \end{aligned}$$

што је тражени облик форме α_1 на $\pi^{-1}(\Sigma)$.

h_t чува нивое функције φ_0 на бази: Важи да је $\varphi_0 \circ \pi \circ h_t = \varphi_0 \circ \pi$ за свако $p \in E$. Ово следи из тога што је $\tilde{Y}(\varphi_0 \circ \pi) = \tilde{Y}(\pi^* \varphi_0) = f \cdot Y(\alpha_0(X)) = 0$ на основу дефиниције векторског поља Y . Функција $\varphi_0 \circ \pi$ је самим тим константна дуж тока векторског поља $\tilde{Y}$, па и дуж слике пресликавања $t \mapsto h_t(p)$.

h_t је локални дифеоморфизам:

Желимо да покажемо да је пресликавање h_t локални дифеоморфизам на околини $\pi^{-1}(W)$ сингуларног скупа $\pi^{-1}(\Sigma)$, док на остатку E то тривијално важи. За то ће нам бити довољно да покажемо да је у свакој тачки

скупа $\pi^{-1}(W)$ Јакобијан пресликавања регуларна матрица, односно да за произвољну тачку из дате околине имамо координате у којима је Јакобијан не-сингуларан.

Довољно је показати да ово важи за неке произвољне карте јер је Јакобијан дифеоморфизма увек регуларан, те самим тим исто важи и за произвољну карту.

Желимо да уочимо погодан координатни систем у којем ћемо срачунати детерминанту Јакобијана J_{h_t} .

Конструкција погодне координатне система: Посматрајмо отворени диск D око произвољне тачке $p \in W$. Како је диск D контрактибилан, то имамо тривијализацију $\psi : \pi^{-1}(D) \rightarrow D \times S^1$.

Уочимо уз то радијалну координату θ на S^1 . Како је $D \subseteq M$ и како је $\pi_*Y \neq 0$ на M јер је $\alpha_0(Y) = 1$ и $\theta(Y) = 0$, то по теореме о исправљивости векторског тока имамо координате (x, y) на некој отвореној околини тачке p у којима је ток векторског поља Y дат са $(x, y) \mapsto (x, y + t)$, а самим тим ће Y у овим координатама бити ∂_y .

Комбинујући ове координате што је могуће тако што узмемо довољно мали отворени диск D , то добијамо координате (x, y, θ) на $\pi^{-1}(D)$. Надаље подразумевамо да су уочене координате потекле од карте $\psi : \pi^{-1}(D) \rightarrow \mathbb{R}^3$ на E коју смо добили комбинујући ове координате.

Сада уочимо да $\pi^*a \circ \psi^{-1}$ и $\alpha_0(X) \circ \psi^{-1}$ не зависе од радијалне координате θ , те имамо да ће h_t у овим координатама бити дато са $(x, y, \theta) \mapsto (x, y + t \cdot \pi^*a \circ \psi^{-1}(x, y, \theta) \cdot \alpha_0(X) \circ \psi^{-1}(x, y, \theta), \theta)$. Директном провером се добија да ће Јакобијева матрица пресликавања $\psi \circ h_t \circ \psi^{-1}$ бити облика

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + t \cdot \pi^*a \cdot fY \cdot \alpha_0(X) & 0 \\ * & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

док ће њена детерминанта износити $1 + t \cdot \pi^*a \cdot fY \cdot \alpha_0(X)$.

Како је $0 \leq f \leq 1$ на E , то важи да за довољно мало W' имамо да је $|(Y(\pi^*a) \cdot \alpha_0(X))(p)| < 1$. Ово следи из чињенице да је $|(Y(\pi^*a) \cdot \alpha_0(X))|$ непрекидна функција на $\pi^{-1}(W')$, па можемо узети околину $W'' = W' \cap \pi(|(Y(\pi^*a) \cdot \alpha_0(X))|^{-1}([0, 1]))$. Овде смо између осталог користили и чињеницу да је π отворено пресликавање што важи јер је $\pi : E \rightarrow M$ раслојење.

Без модификовања досадашње конструкције можемо сматрати да је $W'' = W'$.

Како смо тачку $p \in \pi^{-1}(W)$ бирали произвољно то добијамо да ће свако $h_t : E \rightarrow E$ имати несингуларну матрицу за Јакобијан у произвољној тачки $p \in \pi^{-1}(W)$, те ће због поклапања димензија важити да је свако h_t локални дифеоморфизам на $\pi^{-1}(W)$. На $(E \setminus \pi^{-1}(W')) \cap \pi^{-1}(W)$ је $h_t = \text{id}_E$, док свакако имамо да је $h_t = \text{id}_E$ на $E \setminus \pi^{-1}(W')$, те добијамо да је h_t локални дифеоморфизам за свако $t \in [0, 1]$.

h_t је дифеоморфизам: Како знамо да је Јакобијева матрица сваког h_t регуларна на E , то је она регуларна и на $\pi^{-1}(\Sigma)$.

За свако $p \in \pi^{-1}(\Sigma)$ имамо да је оно регуларна вредност пресликавања $h_t|_{\pi^{-1}(\Sigma)} = \text{id}_{\pi^{-1}(\Sigma)}$. Видимо да се тада у инверзној слици $h_t^{-1}(p)$ налази само тачка p јер важи да је $\varphi_0 \circ \pi \circ h_t = \varphi_0 \circ \pi$ за свако $p \in E$.

Како број тачака у инверзној слици регуларне вредности не зависи од одабира регуларне вредности, то видимо да ће инверзна слика произвољне регуларне вредности $p \in \pi^{-1}(W')$ садржати само једну тачку. Самим тим, како је свака тачка у $\pi^{-1}(W')$ регуларна вредност пресликавања h_t , то добијамо да је h_t дифеоморфизам за $t \in [0, 1]$.

h_t је еквиваријантан: Видимо да је $h_t \circ \varphi^s = \varphi^s \circ h_t$ за све $s, t \in \mathbb{R}$ за свако $s, t \in \mathbb{R}$ јер је h_t задат уз помоћ тока векторског поља Y који комутира са S^1 дејством на E .

На основу доказаних особина за h_t видимо да смо заиста добили еквиваријантну изотопију такву да је $h_1^* \alpha_0 = \alpha_1$ на $\pi^{-1}(\Sigma)$.

2. Модификовање форме α_0 која се поклапа са α_1 на $\pi^{-1}(\Sigma)$:

2.1. $\alpha_t = (1 - t)\alpha_0 + t\alpha_1$ је контактна близу $\pi^{-1}(\Sigma)$:

До сада смо модификовали контактну форму α_0 тако да се поклапа са контактном формом α_1 на сингуларном скупу $\pi^{-1}(\Sigma)$.

По доказаном у кораку 1. овог доказа видимо да ће важити $\beta_0 = \beta_1$ на Σ . Сада желимо да покажемо да је форма

$$\alpha_t = (1 - t) \cdot \alpha_0 + t \cdot \alpha_1$$

инваријантна контактна форма на некој отвореној околини $V \supseteq \pi^{-1}(\Sigma)$. Имамо да је

$$\alpha_t = ((1 - t) \cdot \alpha_0(X) + t \cdot \alpha_1(X)) \cdot \theta + \pi^*((1 - t) \cdot \beta_0 + t \cdot \beta_1),$$

и на $\pi^{-1}(\Sigma)$ имамо да је

$$\alpha_t = \pi^*((1-t) \cdot \beta_0 + t \cdot \beta_1) = \pi^*\beta_0 = \pi^*\beta_1,$$

јер је $\beta_0|_\Sigma = \beta_1|_\Sigma$.

На $\pi^{-1}(\Sigma)$ такође имамо да је $\pi^*\varphi_t = \alpha_t(X) = \pi^*((1-t) \cdot \varphi_0 + t \cdot \varphi_1)$, те видимо да на $\pi^{-1}(\Sigma)$ важи да је

$$\beta_t \wedge d\varphi_t = \beta_t \wedge d((1-t) \cdot \varphi_0 + t \cdot \varphi_1) = (1-t) \cdot \beta_0 \wedge d\varphi_0 + t\beta_1 \wedge d\varphi_1 \neq 0,$$

јер $\beta_0 \wedge d\varphi_0$ и $\beta_1 \wedge d\varphi_1$ задају исту оријентацију по претпоставци. Самим тим видимо да је α_t контактна форма на $\pi^{-1}(\Sigma)$, па и на некој отвореној околини V од $\pi^{-1}(\Sigma)$.

Поред тога, како су форме α_0 и α_1 инваријантне, то ће и њихова линеарна комбинација бити таква.

2.2. Грејево векторско поље и његово продужење:

На основу Грејеве стабилности знамо да постоји векторско поље X_t на $\pi^{-1}(V)$ такво да је $\iota_{X_t}d\alpha_t = -\dot{\alpha}_t + \mu_t\alpha_t$. Ово векторско поље можемо глатко продужити до $\widetilde{X}_t \in \mathfrak{X}(E)$ уколико уочимо неко $g \in C^\infty(M)$ такво да је $\text{supp } g \subseteq \text{int } \pi(V)$ и поставимо да је $\widetilde{X}_t = \pi^*g \cdot X_t$. Приметимо да је $[\widetilde{X}_t, X] = 0$, те ће ток $\widetilde{X}_t$ комутирати са S^1 дејством.

2.3. ИЗОТОПИЈА k_t И ЊЕНА ШРИВИЈАЛНОСТ НА $\pi^{-1}(\Sigma)$:

Битно нам је да добијени контактоморфизми фиксирају $\pi^{-1}(\Sigma)$, како не бисмо покварили претходни корак конструкције.

Интегралне фамилије векторских поља $\widetilde{X}_t$ добијамо фамилију еквиваријантних контактоморфизама $\{k_t\}_{t \in [0,1]}$ који задовољавају $k_t^*\alpha_0 \wedge \alpha_1 = 0$ на основу леме 3.1.3.

Како се контактне форме α_0 и α_1 поклапају на $\pi^{-1}(\Sigma)$, то ће за свако $t \in [0, 1]$ и свако $p \in \pi^{-1}(\Sigma)$ важити да је

$$(\alpha_t)_p = (1-t) \cdot (\alpha_0)_p + t \cdot (\alpha_1)_p = (\alpha_0)_p.$$

Ово специјално значи да је за свако $p \in \pi^{-1}(\Sigma)$ фамилија форми α_t константна по t .

По претходној дискусији добијамо да је $(X_t)_p = 0$ за $p \in \pi^{-1}(\Sigma)$, те је

$$k_t|_{\pi^{-1}(\Sigma)} = \text{id}_E|_{\pi^{-1}(\Sigma)} \text{ за свако } t \in [0, 1]$$

на основу леме 3.1.7 што нам је неопходан услов да не бисмо утицали на претходни корак наше конструкције.

3. Модификовање форме α_0 која се поклапа са α_1 на некој околини $\pi^{-1}(\Sigma)$:

Раније смо видели да постоји функција $\mu \in C^\infty(M)$, $\mu > 0$ таква да је $\varphi_0 = \mu\varphi_1$. Пошто се α_0 и α_1 поклапају на некој околини V од $\pi^{-1}(\Sigma)$, то видимо из $\alpha_0(X)|_V = \alpha_1(X)|_V$ да је $\pi^*\varphi_0|_V = \pi^*\varphi_1|_V$. Одатле закључујемо да је $\mu = 1$ на $\pi(V)$.

3.1. Пути α_t и контактни услов на $\pi^{-1}(M \setminus \Sigma)$:

Пут бирамо тако да буде константан на V , а ван сингуларног скупа контактни услов проверавамо преко става 1.4.5.

Нека је за $t \in [0, 1]$ форма $\alpha_t \in \Omega^1(E)$ дефинисана са

$$\alpha_t = \begin{cases} t \cdot \alpha_0 + (1-t) \cdot \pi^*\mu \cdot \alpha_1, & \text{на } E \setminus \pi^{-1}(\Sigma), \\ \alpha_0, & \text{на } V. \end{cases}$$

Директном провером добијамо да је

$$\begin{aligned} \alpha_t(X) &= t \cdot \alpha_0(X) + (1-t) \cdot \pi^*\mu \cdot \alpha_1(X) = \\ &= t \cdot \pi^*\varphi_0 + (1-t) \cdot \pi^*\varphi_0 = \pi^*\varphi_0 \end{aligned}$$

за свако $t \in [0, 1]$. Свакако на V имамо да је α_t контактна форма на основу њене дефиниције. За α_t на $\pi^{-1}(M \setminus \Sigma)$ добијамо да је

$$\alpha_t = (t \cdot \alpha_0(X) + (1-t) \cdot \pi^*\mu \cdot \alpha_1(X))\theta + \pi^*(t \cdot \beta_0 + (1-t) \cdot \mu\beta_1),$$

одакле на основу дефиниције μ добијамо да је

$$\alpha_t = \alpha_0(X)\theta + \pi^*(t \cdot \beta_0 + (1-t) \cdot \mu\beta_1),$$

те се контактни услов на $\pi^{-1}(M \setminus \Sigma)$ на основу леме 1.4.5 своди на

$$\Omega + d\left(\frac{\beta_t}{\varphi_t}\right) = (1-t) \cdot \left(\Omega + d\left(\frac{\beta_0}{\varphi_0}\right)\right) + t \cdot \left(\Omega + d\left(\frac{\beta_1}{\varphi_1}\right)\right) \neq 0,$$

што показује да је форма α_t контактна на $\pi^{-1}(M \setminus \Sigma)$. Дакле видимо да ће форма α_t бити контактна на целом E .

3.2. Интеграција: фамилија γ_t која је идентична на V :

На V постоји векторско поље $X_t \in \mathfrak{X}(V)$ такво да је $\iota_{X_t}d\alpha_t = -\dot{\alpha}_t + \mu_t\alpha_t$ које на исти начин као и у кораку 2.2. продужавамо до векторског поља $\widetilde{X}_t \in \mathfrak{X}(E)$ и чијом интеграцијом добијамо фамилију еквиваријантних дифеоморфизама $\{\gamma_t\}_{t \in [0,1]} \subseteq \text{Diff}_{S^1}(E)$.

Векторска поља $\widetilde{X}_t$ су задата тако да важи $(\widetilde{X}_t)_p = 0$, за свако $p \in V$ јер је ту $\alpha_t = \alpha_0$ за свако $t \in [0, 1]$. На основу леме 3.1.7 за добијену једнопараметарску фамилију дифеоморфизама имамо да важи $\gamma_t|_V = \text{id}_E|_V$. На овај начин пређашњу конструкцију нисмо модификовали на околини V од $\pi^{-1}(\Sigma)$.

**Свајање корака 1–3:*

Дакле за две произвоље контактне форме α_0 и α_1 са истим сингуларним скупом $\pi^{-1}(\Sigma)$ и исте оријентације имамо еквиваријантан дифеоморфизам $\gamma_1 \circ k_1 \circ h_1 \in \text{Diff}_{S^1}(E)$ такав да је $(\gamma_1 \circ k_1 \circ h_1)^* \alpha_0 \wedge \alpha_1 = 0$, што је и требало доказати. □

Међу условима теореме смо имали и услов да је неопходно да форме α_0 и α_1 задају исту оријентацију. Са једне стране, уколико постоји еквиваријантни дифеоморфизам $f : E \rightarrow E$ из претходне теореме, јасно је да је он уједно и аутоморфизам раслојења $\pi : E \rightarrow M$. На основу чињенице да је $f \circ \varphi^s = \varphi^s \circ f$, видимо да имамо добро дефинисано пресликавање $\widetilde{f} : M \rightarrow M$ дато са $\widetilde{f} \circ \pi = \pi \circ f$. Како је $\pi : E \rightarrow M$ субмерзија и пресликавање $\pi \circ f$ глатко, то ће и пресликавање $\widetilde{f}$ бити глатко. Посматрајући пресликавање $f^{-1} : E \rightarrow E$ и понављајући поступак, добијамо глатко пресликавање $\widetilde{f}^{-1} : M \rightarrow M$. Како важи $\pi \circ \text{id}_E = (\widetilde{f} \circ \widetilde{f}^{-1}) \circ \pi$ за свако $p \in E$, из чињенице да је π сурјективно пресликавање добијамо да за свако $q \in M$ важи да је $\widetilde{f} \circ \widetilde{f}^{-1}(q) = \text{id}_M(q)$. Понављајући аналогни аргумент за $(\widetilde{f}^{-1} \circ \widetilde{f})$ добијамо да је $\widetilde{f} : M \rightarrow M$ дифеоморфизам и да је $\widetilde{f}^{-1} = \widetilde{f}^{-1}$.

Форма кривине контактне форме конекције $\Omega \in \Omega^2(M)$ је уједно и форма запремине на M . За $f \in \text{Diff}_{S^1}(E)$ имамо да ће важити да је $[\widetilde{f}^* \Omega] = [\Omega]$ на основу теореме 1.3.5.

Наредни став нам говори да у случају нетривијалног раслојења претпоставка теореме 3.2.1 о оријентацијама форми α_0 и α_1 се не може ослабити.

Став 3.2.2. *Уколико су форме α_0 и α_1 супротних оријентација еквиваријантно контактоморфне, тада је раслојење $\pi : E \rightarrow M$ тривијално.*

Доказ. Претпоставимо супротно тј. да је раслојење $\pi : E \rightarrow M$ нетривијално. Нека је $\theta \in \Omega^1(E)$ контактна форма конекције на раслојењу $\pi : E \rightarrow M$ за коју знамо да постоји на основу леме 2.1.5 и нека је $\Omega \in \Omega^2(M)$ њој придружена форма кривине. Надаље претпостављамо да је оријентација на M дата формом Ω , што је могуће на основу претпоставке да је форма θ контактна.

Како је $f : E \rightarrow E$ еквиваријантан дифеоморфизам, то имамо да је $(df)_p(X_p) = X_{f(p)}$, где је X векторско поље генерисано S^1 дејством. Самим тим имамо да је

$$f^*\theta(X) - \theta(X) = \theta(f_*X) - \theta(X) = \theta(X) - \theta(X) = 0,$$

те је форма $f^*\theta - \theta$ хоризонтална. Са друге стране, уколико је $\{\varphi^s\}_{s \in \mathbb{R}}$ једнопараметарска група дифеоморфизама генерисана S^1 дејством, на основу еквиваријантности f и чињенице да је θ форма конекције добијамо да важи

$$(\varphi^s)^*(f^*\theta - \theta) = f^*(\varphi^s)^*\theta - (\varphi^s)^*\theta = f^*\theta - \theta,$$

одакле имамо да је форма $f^*\theta - \theta$ инваријантна у односу на S^1 дејство. Дакле имамо да постоји $\eta \in \Omega^1(M)$ таква да важи $f^*\theta - \theta = \pi^*\eta$.

Узимајући у обзир претходно и чињеницу да је $\dim M = 2$, директним рачуном добијамо да је

$$f^*(\theta \wedge d\theta) = f^*\theta \wedge f^*\pi^*\Omega = (\theta + \pi^*\eta) \wedge \pi^*\tilde{f}^*\Omega = \theta \wedge \pi^*\tilde{f}^*\Omega.$$

Са друге стране, како су $\alpha_0 \wedge d\alpha_0$ и $\alpha_1 \wedge d\alpha_1$ супротних оријентација, то из

$$\alpha_1 \wedge d\alpha_1 = f^*(\alpha_0 \wedge d\alpha_0) = J_f \cdot (\alpha_0 \wedge d\alpha_0)$$

и чињенице да је $f : E \rightarrow E$ дифеоморфизам имамо да је $J_f < 0$ на E . Како су α_0 и α_1 инваријантне контактне форме, то имамо да је $J_f \in \mathcal{C}_{S^1}^\infty(E)$, те постоји $\widetilde{J}_f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ такво да је $\pi \circ J_f = \widetilde{J}_f \circ \pi$ и јасно важи $\widetilde{J}_f < 0$ на M . Добијамо да је

$$f^*(\theta \wedge d\theta) = J_f \cdot \theta \wedge d\theta = J_f \cdot \theta \wedge \pi^*\Omega = \theta \wedge \pi^*(\widetilde{J}_f \cdot \Omega).$$

Заједно са претходним ово даје

$$\theta \wedge \pi^*\tilde{f}^*\Omega = \theta \wedge \pi^*(\widetilde{J}_f \cdot \Omega),$$

те контракцијом са X добијамо да је

$$\pi^*(\widetilde{J}_f \cdot \Omega) = \pi^*\tilde{f}^*\Omega,$$

те како је π^* инјективно пресликавање, то је $\tilde{f}^*\Omega = \widetilde{J}_f \cdot \Omega$.

Како важи да је $[\tilde{f}^*\Omega] = [\Omega]$ на основу теореме 1.3.5, то имамо да постоји $\rho \in \Omega^1(M)$ таква да је $\tilde{f}^*\Omega = \Omega + d\rho$. Самим тим како је $\tilde{f}^*\Omega = \widetilde{J}_f \cdot \Omega$ имамо и да је

$$\widetilde{J}_f \cdot \Omega = \Omega + d\rho.$$

Непрекидна функција $\widetilde{J}_f - 1 < 0$ достиже свој максимум $c_{\max} < 0$ на компактној M . Како Ω задаје оријентацију на M , то имамо да је $\int_M \Omega > 0$. Интеграцијом претходне једначине и применом Стоксове формуле добијамо

$$0 > c_{\max} \int_M \Omega \geq \int_M (\widetilde{J}_f - 1) \cdot \Omega = \int_M d\rho = 0,$$

што је контрадикција. Дакле раслојење $\pi : E \rightarrow M$ је тривијално, што је и требало доказати. $\square$

Глава 4

Богатство Луцових контактних структура

У овом поглављу желимо да укажемо на богатство Луцових контактних структура у склопу хомотопских класа инваријантних глатких поља равни. Свака контактна форма α на E задаје контактну структуру, те на датој 3–многострукости и глатко поље 2–равни.

Познато је да су хомотопске класе кооријентисаних поља равни до на хомотопију у потпуности класификована хомотопском класом неког пресликавања $f : E \rightarrow S^2$ [4].

Дефиниција 4.0.1. Нека су $\alpha_0, \alpha_1 \in \Omega^2(E)$ две контактне форме на многострукости E . Кажемо да су форме α_0 и α_1 *хомотопне* уколико су њихова глатка поља равни хомотопна.

Сматрамо да су контактне форме α_0 и α_1 у истој хомотопској класи уколико су таква њихова глатка поља равни.

Главни садржај овог поглавља ће бити доказ теореме 4.1.1 која нам говори да у свакој хомотопској класи форми које дефинишу инваријантна глатка поља равни на E се могу наћи инваријантне контактне форме супротних оријентација.

4.1 Преглед резултата и скица плана

У овом поглављу ћемо доказати наредну теорему:

Теорема 4.1.1. *Нека је $\pi : E \rightarrow M$ једно S^1 -глатко раслојење. У свакој хомотопској класи инваријантних диференцијалних 1-форми без нула постоје две инваријантне контактне форме на E ипакве да су супротних оријентација.*

1. Скица плана класификације: Како су неистичезавајуће форме које ми разматрамо инваријантне у односу на S^1 дејство на контактну многострукост E , то ће хомотопска класификација зависити од хомотопске класе неког пресликавања $\tilde{f} : M \rightarrow S^2$, где је $\tilde{f}$ пресликавање дефинисано са $\tilde{f} \circ \pi = f$.

Прецизније, желимо најпре да уочимо погодну базу инваријантних 1-форми $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ на E преко којих ћемо разложити нашу инваријантну контактну форму. Потом ћемо показати да се свака инваријантна форма η на E може записати као $C^\infty(E)$ -линеарна комбинација базних форми $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ уз помоћ пресликавања која су S^1 -инваријантна

$$\eta = \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \mu_3 \alpha_3, \mu_i \in C^\infty(E), i = 1, 2, 3.$$

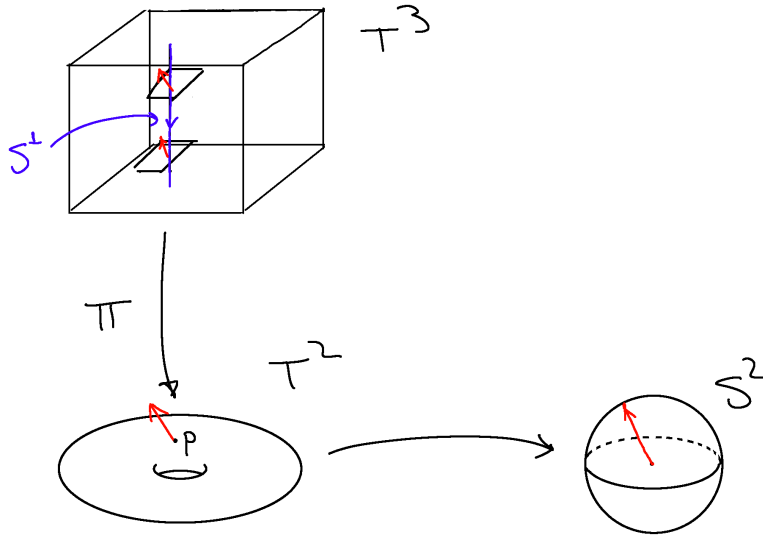
Уколико додатно претпоставимо да је наша форма η неистичезавајућа на E , то значи да ће за пресликавање $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ важити да је $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \neq 0$, те за кодомен овог пресликавања можемо посматрати сферу S^2 тако што пресликавање (μ_1, μ_2, μ_3) нормирамо.

Како је полазно пресликавање било S^1 инваријантно, такво ће бити и нормирано, те ћемо за сваку неистичезавајућу инваријантну форму α на E имати њој придружено пресликавање $\Lambda_\eta : M \rightarrow S^2$ које ће одређивати њену хомотопску класу.

Иако је претходна конструкција у неку руку техничка, геометријски је јасно шта радимо-како је свака раван у $\mathbb{R}^3$ одређена неким јединичним вектором нормале, то ће контактна дистрибуција на произвољној 3-многострукости бити одређена глатким пољем вектора који у свакој тачки $p \in E$ задају раван контактне дистрибуције $\ker \alpha$, видети слику 4.1.

2. Скица плана конструкције форми: Базну површ M ћемо утопити у $\mathbb{R}^3$ тако да она садржи диск $D = D^2(1) = \{x_1 = 0, x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$.

Конструисаћемо само специфичне врсте инваријантних контактних форми на E -знамо од раније да је сингуларни скуп произвољне инваријантне контактне форме на E нека унија кружница $\Sigma \subseteq M$, и ми ћемо при конструкцији форми захтевати да њихов сингуларни скуп буде садржан у диску D . Ово



Слика 4.1: Пресликавање које ће дати хомотопску класу инваријантног кооријентисаног глатког поља равни на T^3 . Дуж фибре се контактна структура не мења, па се пресликавање спушта на базу T^2 . За кодомен можемо узети S^2 јер контактна форма нигде не ишчезава.

није безразложно-видећемо да ће хомотопска класа пресликавања Λ_η описаног у првом делу скице зависити од скупа Σ , те нећемо желети сингуларне кружнице које се налазе изван скупа D .

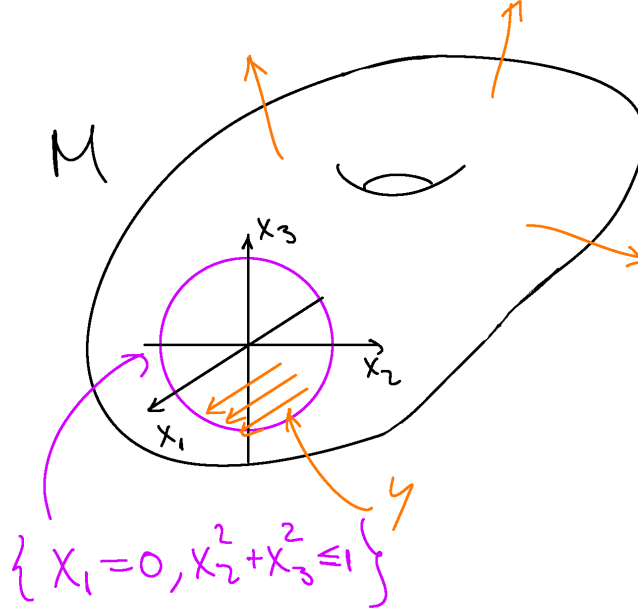
Након што смо то урадили, поновићемо конструкцију из теореме 2.0.1 и описати како је могуће да њу спроведемо. Тиме ће теорема 4.1.1 бити доказана.

4.2 Поставка и конструкција базе инваријантних форми

Како је базна многострукост површ, можемо претпоставити да је утопљена у $\mathbb{R}^3$ и то тако да садржи јединични диск $D = D^2(1) = \{x_1 = 0, x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$. Постоје функције $\psi_j : M \rightarrow \mathbb{R}, j \in \{1, 2, 3\}$ такве да задовољавају услове:

1. $\psi_1|_D = 1, \psi_2|_D = \psi_3|_D = 0$,
2. векторско поље $Y = \psi_1\partial_{x_1} + \psi_2\partial_{x_2} + \psi_3\partial_{x_3}$ је трансверзално на M .

Да не бисмо преоптеретили запис, сматрамо да су форме $dx_i \in \Omega^1(M)$ за $i \in \{1, 2, 3\}$.



Слика 4.2: Претпостављамо да је базна површ уложена у $\mathbb{R}^3$ тако да садржи диск $D = \{x_1 = 0, x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Векторско поље Y је свуда трансверзално на M , а на диску D је $(1, 0, 0)$.

Став 4.2.1. *Инваријантне форме $\alpha_j = (\pi^*\psi_j)\theta + \pi^*dx_j$ су линеарно независне у свакој тачки E .*

Доказ. Директним рачуном добијамо да важи да је

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 = \theta \wedge \pi^*(\iota_Y(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)) + \pi^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3),$$

те се контракцијом са векторским пољем X придруженим S^1 дејству добија

$$\iota_X(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) = \pi^*(\iota_Y(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)).$$

На основу трансверзалности векторског поља Y на улагање M је $\iota_Y(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$ форма запремине на M . На основу чињенице да је $\pi_* : \ker \theta \rightarrow TM$ изоморфизам добијамо да је добијена форма различита од нуле у свакој тачки E , што доказује линеарну независност форми $\alpha_i, i \in \{1, 2, 3\}$.

□

Свака инваријантна форма η на E се може записати у бази $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ као $\eta = \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \mu_3\alpha_3$ за неке глатке функције $\mu_i : E \rightarrow \mathbb{R}$. На основу линеарне независности и инваријантности форми $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ закључујемо да су глатке функције μ_i инваријантне. Самим тим можемо сматрати да је домен функција μ_i заправо M односно $\mu_i : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Уколико је форма η неистезавајућа на E , као што су нпр. форме конекције или контактне форме, то је у свакој тачки $p \in E$ $\eta_p \neq 0$. Одатле имамо да је вектор $\tilde{\Lambda}_\eta = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \neq (0, 0, 0)$ у свакој тачки $p \in E$. На основу инваријантности поменутих типова форми у односу на S^1 дејство имамо да су њима придружене функције μ_i такође инваријантне.

Овиме смо показали да имамо добро дефинисано пресликавање $\Lambda_\eta : M \rightarrow S^2$. Уз то, на основу глаткости полазне форме и глаткости форми α_i добијамо да је и пресликавање Λ_η глатко.

Уколико је након нормализације инваријантна контактна форма облика $\omega = \pi^*\varphi \cdot \theta + \pi^*\beta$, тада ћемо добити да је $\mu_1|_D = \varphi$.

Познато је да ће степен пресликавања Λ_η одредити у потпуности хомотопску класу пресликавања Λ_η те самим тим и форме η .

4.3 Доказ теореме 4.1.1

У овом делу желимо да конструишемо фамилију инваријантних контактних форми са сингуларним скупом који је садржан у целисти у D .

Лема 4.3.1. *Нека је $C \subseteq \text{int } D$ кружница без самопресека. На $\pi : E \rightarrow M$ постоји форма конекције θ која задовољава контактни услов на некој околини скупа $\pi^{-1}(M \setminus D)$. Оријентација θ на околини скупа $\pi^{-1}(M \setminus D)$ се може изабрати произвољно.*

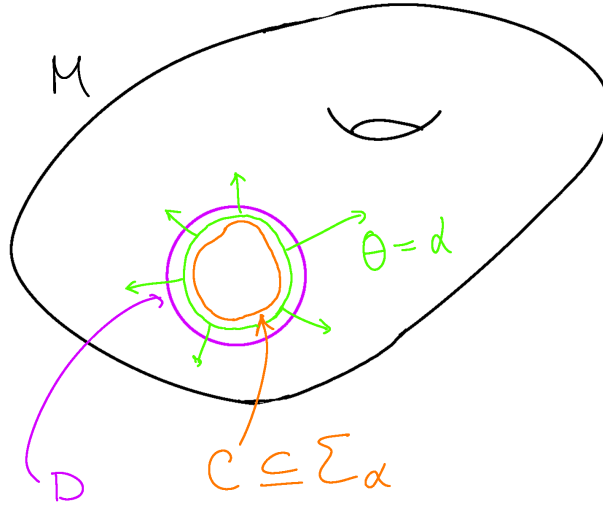
Доказ. Нека је $C \subseteq \text{int } D$ кружница без самопресека. По теорему 2.0.1 имамо да постоји инваријантна контактна форма $\tilde{\theta}$ произвољне оријентације чији је сингуларни скуп C . Јасно да је тада $\varphi_{\tilde{\theta}} \neq 0$ на $M \setminus D$, те имамо да је $\hat{\theta} = \frac{\tilde{\theta}}{\varphi_{\tilde{\theta}}}$ једна форма конекције на некој околини $\pi^{-1}(M \setminus D)$. Уз помоћ разбијања јединице се $\hat{\theta}$ проширује до форме конекције θ на E . Видимо да на $\pi^{-1}(M \setminus D)$ важи да је $\theta(X) = 1 \neq 0$.

Како се θ поклапа са $\widehat{\theta}$ на некој околини скупа $\pi^{-1}(M \setminus D)$ и како је на њој

$$\frac{\widetilde{\theta}}{\widetilde{\theta}(X)} \wedge d \left(\frac{\widetilde{\theta}}{\widetilde{\theta}(X)} \right) = \frac{1}{\widetilde{\theta}(X)^2} \cdot \widetilde{\theta} \wedge d\widetilde{\theta},$$

то на основу контактнoг услова за $\widetilde{\theta}$ добијамо да је и $\widehat{\theta}$ контактна на некој околини скупа $\pi^{-1}(M \setminus D)$. $\square$

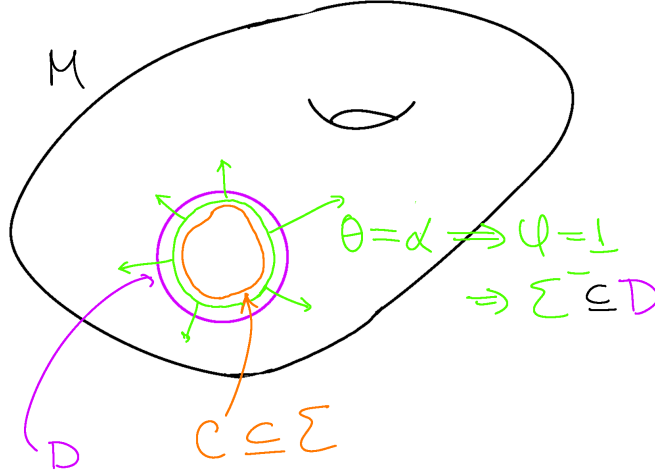
Нека је θ форма конекције на $\pi : E \rightarrow M$ добијена у претходној леми и нека је α инваријантна контактна форма која се након нормализације поклапа са θ на некој околини $\pi^{-1}(M \setminus D)$. Како знамо да на $\pi^{-1}(M \setminus D)$ важи да је $\theta(X) \neq 0$, *што је чистио сингуларни скуп Σ_α садржан у диску D* . Желимо да одредимо хомотопску класу форме α односно хомотопску класу пресликавања Λ_α када за форму конекције узмемо баш θ . Ово је важан одабир с обзиром на то да нам дефиниције форми α_i зависе од одабира форме конекције на раслојењу.



Слика 4.3: Форму α бирамо тако да се она и контактна форма конекције θ поклапају на некој околини скупа $\pi^{-1}(M \setminus D)$.

Нека је $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ дефинисана са $\alpha(X) = \pi^*\varphi$. Уочимо да су на основу теореме о рангу $\Sigma^+ = \varphi^{-1}([0, +\infty))$ и $\Sigma^- = \varphi^{-1}((-\infty, 0])$ глатке компактне подмногоструктури у M са заједничком границом Σ . На основу става 1.4.4 и поклапања форми α и θ на скупу $\pi^{-1}(M \setminus D)$ имамо да је $\varphi \neq 0$ на $M \setminus D$.

Такође како је $\theta(X) = 1 > 0$ на $\pi^{-1}(\partial D)$, то имамо да је $\Sigma^- \subseteq D$. Самим тим имамо да је $D \cap \Sigma^- = \Sigma^-$.



Слика 4.4: Читав скуп Σ^- ће се налазити унутар диска D јер се форме α и θ поклапају на некој околини скупа $\pi^{-1}(M \setminus D)$.

Лема 4.3.2. *Постоји регуларна вредност $y = (a, b, c) \in S^2$ пресликавања $\Lambda_\alpha : M \rightarrow S^2$ таква да важи:*

1. $a < 0$

2. y је регуларна вредност пресликавања $\Lambda_\theta : M \rightarrow S^2$

Доказ. Уочимо да је $\Lambda_\theta|_D = (1, 0, 0)$. Важи да је $\Lambda_\theta|_{M \setminus D} = \Lambda_\alpha|_{M \setminus D}$ јер смо форму α конструисали тако да се поклапа са формом θ на некој околини скупа $\pi^{-1}(M \setminus D)$. Како је $\Sigma^- \subseteq D$, то у тачки $p \in \Sigma^-$ имамо да је $\mu_1(p) < 0$ на основу чињенице да је $\mu_1 = \varphi$ на D за било коју инваријантну контактну форму $\pi^*\varphi \cdot \theta + \pi^*\beta$. Дакле знамо да је скуп $L = \Lambda_\alpha^{-1}(\{(x, y, z) \in S^2 | x < 0\})$ непразан, а на основу непрекидности Λ_α имамо и да је отворен.

$M \cap L$ ће бити једна отворена подмногоструктурност од M . Пресликавање $\Lambda_\alpha : M \cap L \rightarrow S^2$ испуњава услове Сардове теореме, те имамо да постоји регуларна вредност $y = (a, b, c) \in S^2$ за коју важи да је $a < 0$ по конструкцији скупа L .

Ова регуларна вредност ће уједно бити и регуларна вредност пресликавања Λ_θ , што следи из чињенице да је $\Lambda_\theta|_D = (1, 0, 0)$, те мора да важи да је

$\Lambda_\theta^{-1}(y) \subseteq M \setminus D$ јер је $a < 0$. Уколико је скуп $\Lambda_\theta^{-1}(y)$ празан, то је y свакако регуларна вредност пресликавања Λ_θ . $\square$

Знамо да $\deg \Lambda_\alpha$ не овиси о избору регуларне вредности y , те имамо да је

$$\begin{aligned} \deg \Lambda_\alpha &= \deg_y \Lambda_\alpha = \sum_{x \in \Lambda_\alpha^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(d\Lambda_\alpha)_x = \sum_{x \in \Lambda_\theta^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(d\Lambda_\alpha)_x + \sum_{x \in \Lambda_\alpha^{-1}(y) \setminus \Lambda_\theta^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(d\Lambda_\alpha)_x \\ &= \deg_y \Lambda_\theta + \sum_{x \in \Lambda_\alpha^{-1}(y) \setminus \Lambda_\theta^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(d\Lambda_\alpha)_x = \deg \Lambda_\theta + \sum_{x \in \Lambda_\alpha^{-1}(y) \setminus \Lambda_\theta^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(d\Lambda_\alpha)_x, \end{aligned}$$

где претпоследња једнакост следи из чињенице да је $\Lambda_\theta|_{M \setminus D} = \Lambda_\alpha|_{M \setminus D}$ и чињенице да је y регуларна вредност за Λ_θ .

Сређивање израза $\sum_{x \in \Lambda_\alpha^{-1}(y) \setminus \Lambda_\theta^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(d\Lambda_\alpha)_x$:

Желимо да израчунамо још последњу суму. Важи да је $\Lambda_\alpha^{-1}(y) \setminus \Lambda_\theta^{-1}(y) \subseteq D$. Како је многострукост M у пару са одговарајућим пресликавањем Λ_α на њој незграпна за рад, у интересу нам је да пронађемо неку погодну многострукост $\widehat{M}$ која ће садржати неки подскуп $\widehat{D}$ дифеоморфан скупу D . За пресликавање $\tilde{\Lambda} : \widehat{M} \rightarrow S^2$ желимо да се поклапа са Λ_α на $\widehat{D}$, док на $\widehat{M} \setminus \widehat{D}$ желимо да има само сингуларне тачке како не бисмо додали још неки члан полазној суми.

Приметимо додатно да је $\Lambda_\alpha|_{\partial D} = (1, 0, 0)$, те можемо посматрати пресликавање $\tilde{\Lambda} : S^2 \rightarrow S^2$ које ће једну хемисферу N сликати у тачку $(1, 0, 0)$, док ће се на другој хемисфери коју поистовећујемо са диском D поклапати са Λ_α . На овај начин постижемо жељено понашање пресликавања $\tilde{\Lambda}$ због константности пресликавања на $N = \overline{S^2 \setminus D}$.

Дефинишимо $\operatorname{sgn}(\Sigma_i)$ за произвољну компоненту повезаности скупа Σ тако да је $\operatorname{sgn}(\Sigma_i) = 1$ уколико је Σ_i спољна граница скупа Σ^- и $\operatorname{sgn}(\Sigma_i) = -1$ уколико је Σ_i унутрашња граница скупа Σ^- .

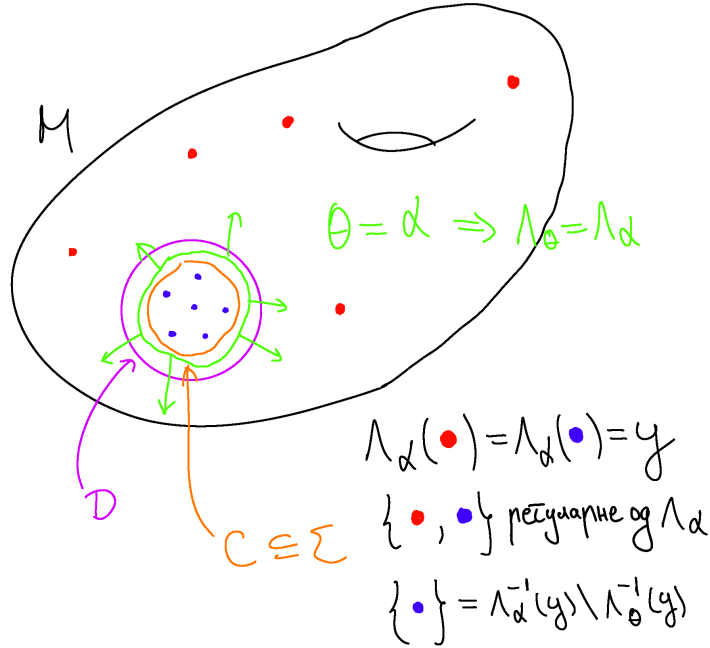
Теорема 4.3.3. *Важи да је*

$$\deg \tilde{\Lambda} = \sum_i \operatorname{sgn}(\Sigma_i),$$

где сума иде по компонентама повезаности Σ_i скупа Σ .

Доказ. Уочимо на домен сфери диференцијалну 2-форму дату са

$$\begin{cases} v = 0 & \text{за } x_1 \geq 0 \\ v = d(k \cdot (x_2 dx_3 - x_3 dx_2)) & \text{на } x_1 \leq 0, \end{cases}$$



Слика 4.5: У суми $\sum_{x \in \Lambda_\alpha^{-1}(y) \setminus \Lambda_\theta^{-1}(y)} \text{sgn}(d\Lambda_\alpha)_x$ се налазе регуларне тачке пресликавања Λ_α које нису уједно и регуларне тачке пресликавања Λ_θ , а притом се оне сликају у исту регуларну вредност $y \in S^2$.

где је k глатка функција на S^2 по $x_2^2 + x_3^2$ таква да је на некој околини екватора $S^2 \cap \{x_1 = 0\}$ једнака $\frac{1}{2\pi \cdot (x_2^2 + x_3^2)}$ да би форма v била глатка.

По Стоксовој формули добијамо да је

$$\int_{S^2} v = \int_{S^2 \cap \{x_1 \leq 0\}} v = \int_{S^2 \cap \{x_1 = 0\}} \frac{x_2 dx_3 - x_3 dx_2}{2\pi \cdot (x_2^2 + x_3^2)} = 1,$$

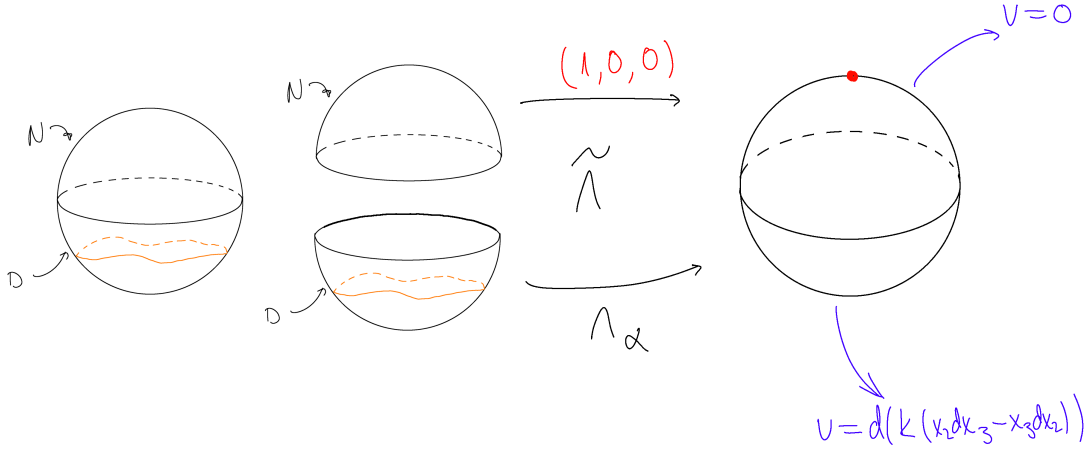
те на основу својства степена добијамо да је

$$\deg \tilde{\Lambda} = \deg \tilde{\Lambda} \cdot \int_{S^2} v = \int_{S^2} \tilde{\Lambda}^* v.$$

Како се горња хемисфера N слика при $\tilde{\Lambda}$ у $(1, 0, 0)$ и како је $v_{(1,0,0)} = 0$, то је

$$\int_N \tilde{\Lambda}^* v = 0.$$

На скупу $D \cap \Sigma^+ \subseteq D$ знамо да ће за $\Lambda_\alpha = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ важити $\mu_1 = \varphi_\alpha$. Уз то видимо да на скупу $D \cap \Sigma^+$ функција φ_α узима само ненегативне вредности. Како се пресликавање $\tilde{\Lambda}$ поклапа са пресликавањем Λ_α на D , то добијамо да је $\tilde{\Lambda}(D \cap \Sigma^+) \subseteq S^2 \cap \{x_1 \geq 0\}$. Ово специјално значи да је $\tilde{\Lambda}^* v = 0$ на $D \cap \Sigma^+$.



Слика 4.6: Геометријски ће пресликавање $\tilde{\Lambda}$ колапсирати северну хемисферу N у тачку $(1, 0, 0)$, док ће јужну, коју поистувећујемо са D сликати исто као и Λ . Диференцијална форма v ће на северној хемисфери кодомен сфере N бити $v = 0$, а на јужној $v = d(k \cdot (x_2 dx_3 - x_3 dx_2))$.

На основу адитивности интеграла по области интеграције добијамо да је

$$\deg \tilde{\Lambda} = \int_{S^2} \tilde{\Lambda}^* v = \int_D \tilde{\Lambda}^* v + \int_N \tilde{\Lambda}^* v = \int_{D \cap \Sigma^+} \tilde{\Lambda}^* v + \int_{D \cap \Sigma^-} \tilde{\Lambda}^* v = \int_{\Sigma^-} \tilde{\Lambda}^* v.$$

Како је $\mu_1 = 0$ на скупу Σ , то мора да важи $\mu_2^2 + \mu_3^2 = 1$ на Σ , с обзиром на то да је кодомен пресликавања $\tilde{\Lambda}$ сфера S^2 . Употребом Стоксове формуле добијамо да је

$$\deg \tilde{\Lambda} = \int_{\Sigma^-} d(k \circ \tilde{\Lambda}(\mu_2 d\mu_3 - \mu_3 d\mu_2)) = \int_{\Sigma} \frac{\mu_2 d\mu_3 - \mu_3 d\mu_2}{2\pi \cdot (\mu_2^2 + \mu_3^2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \mu_2 d\mu_3 - \mu_3 d\mu_2.$$

Последњи интеграл одговара степену пресликавања $(\mu_2, \mu_3) : \Sigma \rightarrow S^1$ када на S^1 фиксирамо угаону форму $\frac{x_2 dx_3 - x_3 dx_2}{2\pi \cdot (x_2^2 + x_3^2)}$ записану у Декартовим координатама. Важи га је $(\mu_2, \mu_3) \simeq (\partial_{x_3} \varphi, -\partial_{x_2} \varphi)$: На $\pi^{-1}(\Sigma)$ важи да је $\alpha(X) = \pi^* \varphi_\alpha = 0$. Како је $\Sigma \subseteq D$, то на основу чињенице да је $\mu_1 = \varphi_\alpha$ на D добијамо да је $\mu_1 = 0$ на Σ . Самим тим за α важи да је $\alpha = \pi^*(\mu_2 dx_2 + \mu_3 dx_3) = \pi^* \beta$ на $\pi^{-1}(\Sigma)$. На основу чињенице да је α контактна на $\pi^{-1}(\Sigma)$ по ставу 1.4.4 добијамо да је

$$\beta \wedge d\varphi = (\mu_2 \partial_{x_3} \varphi - \mu_3 \partial_{x_2} \varphi) \cdot dx_2 \wedge dx_3 \neq 0,$$

односно $\mu_2 \partial_{x_3} \varphi - \mu_3 \partial_{x_2} \varphi \neq 0$.

Додатно, приметимо да важи да је $(\mu_2, \mu_3) \simeq (\partial_{x_3} \varphi, -\partial_{x_2} \varphi)$ када их посматрамо као пресликавања из Σ у $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Конкретна хомотопија $H_t : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ је дата са

$$H_t = (1 - t) \cdot (\mu_2, \mu_3) + t \cdot (\partial_{x_3} \varphi, -\partial_{x_2} \varphi)$$

што је добро дефинисано јер важи

$$\begin{aligned} \|(1 - t) \cdot (\mu_2, \mu_3) + t \cdot (\partial_{x_3} \varphi, -\partial_{x_2} \varphi)\|^2 &= (1 - t)^2 \cdot \|(\mu_2, \mu_3)\|^2 + t^2 \cdot \|(\partial_{x_3} \varphi, -\partial_{x_2} \varphi)\|^2 \\ &\quad + 2t(1 - t) \cdot (\mu_2 \partial_{x_3} \varphi - \mu_3 \partial_{x_2} \varphi) \neq 0. \end{aligned}$$

за свако $t \in [0, 1]$.

Како је $\|(\partial_{x_3} \varphi, -\partial_{x_2} \varphi)\|^2 = (\partial_{x_3} \varphi)^2 + (\partial_{x_2} \varphi)^2$, видимо да је $(\partial_{x_3} \varphi, -\partial_{x_2} \varphi) \neq 0$ у свакој тачки Σ . Уколико то не би био случај, онда би на осову претходне једнакости важило да је

$$d\varphi = \partial_{x_3} \varphi \cdot dx_3 + \partial_{x_2} \varphi \cdot dx_2 = 0 \text{ на } \Sigma,$$

што противречи ставу 1.4.5 и претпоставци да је α контактна на $\pi^{-1}(\Sigma)$. Овине смо показали да су пресликавања (μ_2, μ_3) и $(\partial_{x_3} \varphi, -\partial_{x_2} \varphi)$ хомотопна. Како је степен хомотопних пресликавања исти, то још преостаје да израчунамо степен пресликавања $\nabla \varphi = (\partial_{x_3} \varphi, -\partial_{x_2} \varphi) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Израчунавање $\deg \nabla \varphi$: Нека је $\Sigma_i \subseteq \Sigma$ произвољна кружница у сингуларном скупу и приметимо да је $\frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|}$ јединични вектор нормале на Σ који на њему индукује оријентацију која је иста као и оријентација индукована са Σ^- . Ово се лако види из чињенице да је

$$\nabla \varphi(\varphi) = d\varphi(\nabla \varphi) = \|\nabla \varphi\|^2 > 0 \text{ на } \Sigma,$$

те функција φ расте дуж тока $\nabla \varphi$. Самим тим, видимо да је на свакој кружници Σ_i

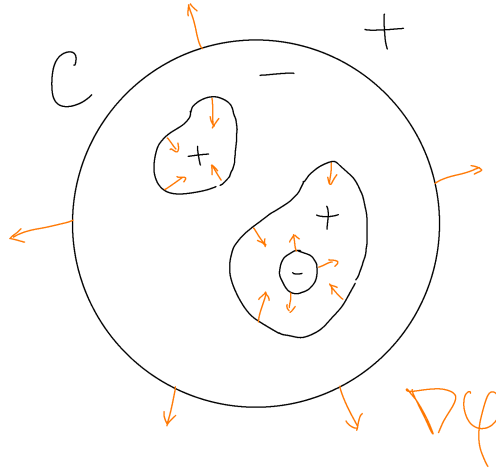
$$\frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|} \Big|_{\Sigma_i} : \Sigma_i \rightarrow S^1$$

пресликавање које свакој тачки затворене криве без самопресека додељује јединични вектор нормале, а за које знамо да је степена 1 уколико нормала извире из домен сфере и степена -1 уколико нормала увире у домен сферу

[10]. Уколико вредност овог степена означимо са $\text{sgn}(\Sigma_i)$, на основу адитивности интеграла по области интеграције добијамо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \mu_2 d\mu_3 - \mu_3 d\mu_2 = \sum_i \text{sgn}(\Sigma_i),$$

што завршава доказ.



Слика 4.7: Са слике видимо да је $\nabla\varphi$ вектор нормале на Σ који индукује оријентацију која је сагласна са оријентацијом Σ^- . За кружницу Σ_i са чије је спољне стране $+$ имамо да је $\text{sgn} \Sigma_i = +1$, док за кружницу са чије спољне стране је знак $-$ имамо да је $\text{sgn} \Sigma_i = -1$.

□

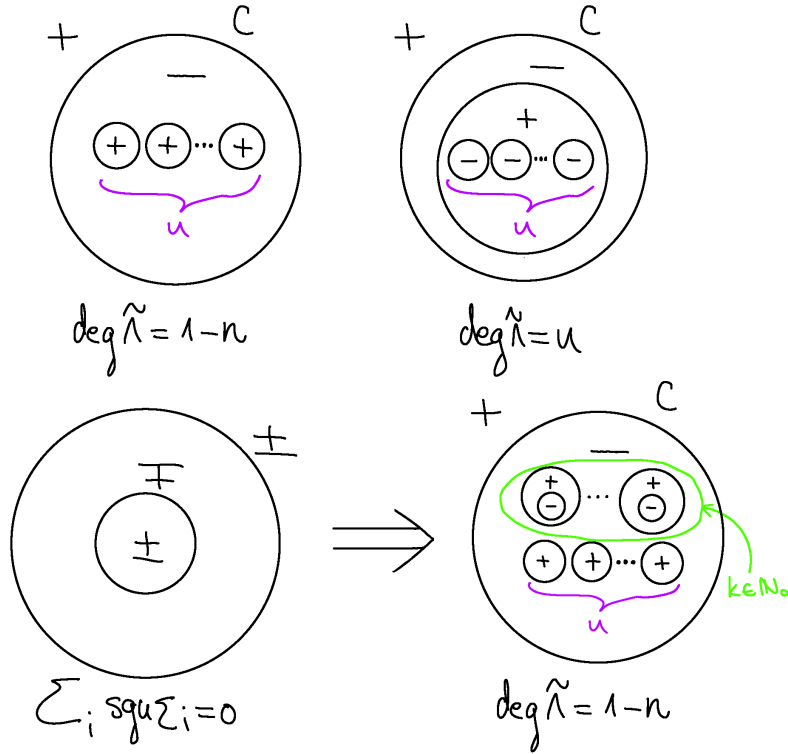
На основу до сад доказаног добијамо да је Λ_α једнак

$$\deg \Lambda_\alpha = \deg \Lambda_\theta + \sum_i \text{sgn}(\Sigma_i),$$

где сума иде по компонентама повезаности скупа Σ .

Конструкција фамилије инваријантних контактних форми

Уочимо сада да уз горње две конфигурације на слици 4.8 можемо добити произвољан број за $\deg \Lambda_\alpha$, као и да додавањем конфигурације која се налази доле лево на слици не мењамо степен пресликавања Λ_α .



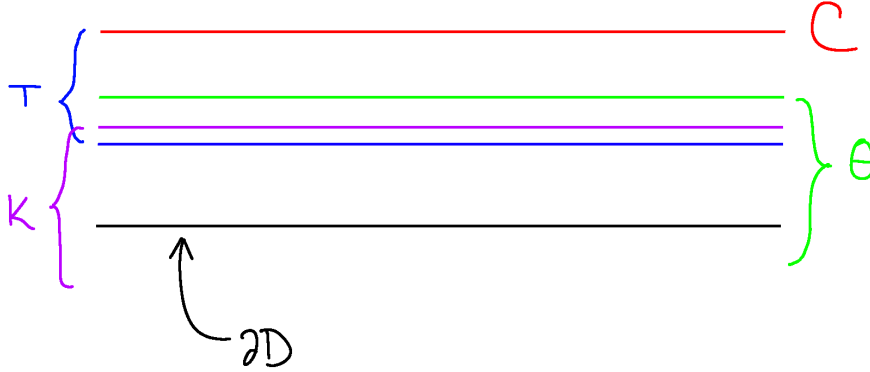
Слика 4.8: Конфигурације кружница у сингуларном скупу Σ и одговарајуће вредности степена $\deg \tilde{\Lambda}$. У доњем левом углу имамо два типа конфигурација које не мењају вредност степена, треба посматрати алтернирајуће знакове. У доњем десном углу видимо да од конфигурације у горњем левом углу можемо добити исти степен са различитим скупом Σ .

По теорему 2.0.1 постоји инваријантна контактна форма α на M чији је сингуларни скуп управо једна од горње две конфигурације на слици 4.8.

Желимо још да конструишемо контактну форму која ће се поклапати са контактном формом конекције θ на $\pi^{-1}(M \setminus D)$ коју смо фиксирали на почетку. Како би формалан доказ ове конструкције био незграпан, идеја је да се водимо сликом 4.9.

По нотацији из другог поглавља, то значи да би морало да важи да је $\beta = 0$ и $\varphi = 1$ на $M \setminus D$. Како смо форму конекције конструисали уз помоћ разбијања јединице и контактне форме конекције $\hat{\theta}$, то постоји околина скупа $\pi^{-1}(M \setminus D)$ на којој је и сама форма θ контактна.

У другом поглављу смо конструисали цевасту околину T кружница Σ и



Слика 4.9: Кружница C приближена граници ∂D : цеваста околина T сече комплемент компакта K , док је на околини означеној са θ форма контактна форма.

компакт K који их не садржи, а који са T има непразан пресек. Контактни услов смо потом посебно проверавали на $\overline{T \cap K}$.

Најпре желимо да конструкцију ограничимо на диск, те бирамо ε довољно мало тако да је цеваста околина $T \approx \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ скупа Σ у потпуности садржана у диску D .

Конструкција у околини кружнице C : Кружницу C из конфигурација изнад желимо да довољно близу приближимо граници диска ∂D тако да је компонента повезаности скупа K која садржи ∂D садржана у околини скупа $\pi^{-1}(M \setminus D)$ на којем се θ поклапа са контактном формом конекције $\hat{\theta}$ коју смо конструисали при почетку овог поглавља.

Позивајући се опет на конструкцију у другој глави, видимо да је за компоненту повезаности скупа K која садржи скуп $M \setminus D$ довољно да узмемо форму $\beta = 0$ да би изнад те компоненте контактни услов био задовољен.

Уз то, за функцију φ је неопходно узети глатку функцију која ће бити 1 на некој околини ∂D која не сече T , а потом глатко опадати до ε на граници ∂T цевасте околине кружнице C .

Конструкција у околини преосталих кружница: За преостале кружнице у Σ поступак спроводимо потпуно аналогно ономе из другог поглавља рада. Додатно, како је оријентација форме $\hat{\theta}$ била произвољно одабрана, то добијамо тврђење теореме 4.1.1.

Видимо да две инваријантне контактне форме могу бити хомотопне без

да буду хомотопне као инваријантне контактне форме што је последица тога што им се сингуларни скупови могу разликовати.

Такође, произвољна хомотопска класа форми без нуле не мора нужно садржати инваријантну контактну форму. У овом поглављу смо конструисали базне форме $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ које су по претпоставци биле инваријантне, али ми не знамо да у свакој хомотопској класи неистичењајућих диференцијалних 1–форми на E такве форме постоје.

Глава 5

Класификација одређених Луцових контактних структура

5.1 Мотивација

Једно од основних питања контактне геометрије је да ли је одређена контактна структура затегнута или заврнута. У овој глави наводимо неке познате резултате о затегнутости и заврнутости Луцових контактних структура. На крају наводимо и неке отворене проблеме.

Дефиниција 5.1.1. Нека је $(E, \ker \alpha)$ контактна многострукост. Контактна структура $\ker \alpha$ је *заврнута* уколико постоји утопљени диск $D \subseteq M$ такав да је $T_p(\partial D) \subseteq \ker_p \alpha$ за све $p \in \partial D$. У супротном, кажемо да је контактна структура *затегнута*.

Пример 15. Нека је дата контактна многострукост $(\mathbb{R}^3, \alpha_{\text{ot}})$ са контактном формом

$$\alpha_{\text{ot}} = \cos r \cdot dz + r \sin r \cdot d\varphi$$

у цилиндричним координатама (r, φ, z) на $\mathbb{R}^3$. Ова форма је заиста глатка јер је форма $\cos r \cdot dz$ очигледно глатка, а за форму $r \sin r d\varphi$ видимо да је глатка јер је производ глатке форме $r^2 \cdot d\varphi$ са глатком функцијом $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(r) = \frac{\sin r}{r}$ за $r \neq 0$ и $f(0) = 1$.

Директним рачуном добијамо да је

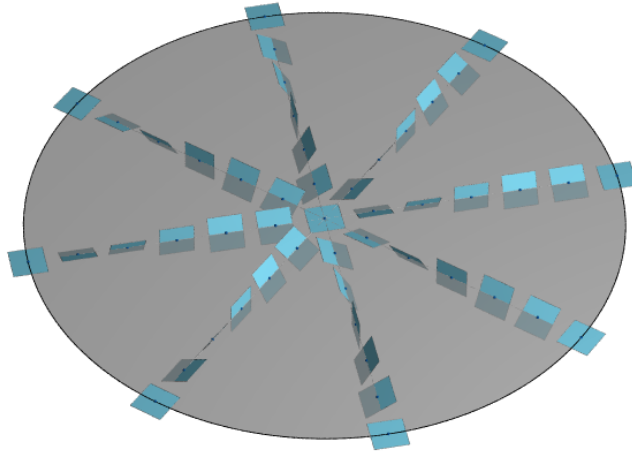
$$d\alpha_{\text{ot}} = -\sin r \cdot dr \wedge dz + (\sin r + r \cos r) \cdot dr \wedge d\varphi,$$

ГЛАВА 5. КЛАСИФИКАЦИЈА ОДРЕЂЕНИХ ЛУЦОВИХ КОНТАКТНИХ СТРУКТУРА

одакле је

$$\alpha_{\text{ot}} \wedge d\alpha_{\text{ot}} = \left(1 + \frac{\sin r}{r} \cos r\right) \cdot r dr \wedge d\varphi \wedge dz \neq 0,$$

па је α_{ot} заиста контактна форма. Ову форму називамо *стандардном заврнутом контактном структуром на $\mathbb{R}^3$* . Диск $D_{\text{ot}} = \{z = 0, r \leq \pi\}$ називамо *стандардним заврнутим диском*. Како видимо да је за $r = \pi$ наша контактна форма заправо $-dz$, то добијамо да важи $T_p(\partial D) \subseteq \ker_p \alpha_{\text{ot}}$, те је наша контактна структура заврнута. Напоменимо још да добијена контактна структура *није* контактоморфна стандардној контактној структури на $\mathbb{R}^3$.

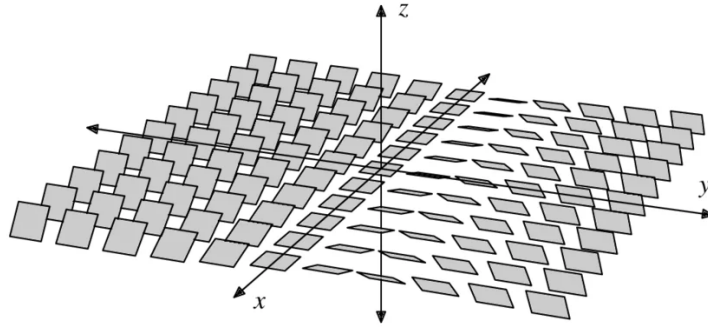


Слика 5.1: Стандардна заврнута контактна структура на $\mathbb{R}^3$. Видимо да граница осеченог диска лежи унутар контактне структуре.

Пример 16. Контактна структура $(\mathbb{R}^3, \alpha_{\text{std}} = z + x \cdot dy)$ је затегнута.

Дефиниција 5.1.2. За контактну 3–многострукост (E, ξ) кажемо да је јако попуњива уколико постоји компактна симплектичка 4–многострукост таква да је $E = \partial W$ и постоји векторско поље Y дефинисано на околини ∂W које показује споља дуж ∂W , такво да је $\xi = \ker \iota_Y \omega|_{TE}$ и да важи $\mathcal{L}_Y \omega = \omega$. Векторско поље Y се назива *Лиувилевим векторским пољем*.

Дефиниција 5.1.3. За контактну 3–многострукост (E, ξ) кажемо да је *слабо попуњива* уколико постоји компактна симплектичка 4–многострукост (W, ω)



Слика 5.2: Стандардна контактна структура на $\mathbb{R}^3$. Може се показати да ће ова контактна структура бити затегнута.

таква да је $E = \partial W$ таква да се индукована оријентација поклапа са оријентацијом E и уколико је $\omega|_{\xi} > 0$, односно ω задаје позитивну оријентацију на ξ .

Појмови попуњивости се могу дефинисати и за контактне многострукости виших димензија и испоставља се да су у вишим димензијама ови појмови еквивалентни [4].

Пример 17. Контактна многострукост $(S^3, \alpha_{st} = \frac{i}{4}(z_1 d\bar{z}_1 - \bar{z}_1 dz_1 + z_2 d\bar{z}_2 - \bar{z}_2 dz_2))$ је јако попуњива са $(D^4, \omega = \frac{i}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2))$.

Пример 18. Контактна многострукост $(S^1 \times S^2, \alpha = h dt + \frac{i}{4}(z d\bar{z} - \bar{z} dz))$ је јако попуњива са $(D^2 \times S^2, \omega = dh \wedge dt + \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z})$.

Пример 19. (T^3, α_1) је јако попуњива, док су (T^3, α_n) , $n \geq 2$, слабо попуњиве.

Лема 5.1.4. Уколико је контактна многострукост јако попуњива, онда је она и слабо попуњива.

Доказ. Нека је (W, ω) симплектичка 4-многострукост таква да је $M = \partial W$ и постоји векторско поље X дефинисано на околина ∂W које показује споља дуж W такво да је $\xi = \ker \iota_X \omega|_{TM}$ и да важи $\mathcal{L}_X \omega = \omega$.

Уочимо контактну форму $\alpha = \iota_X \omega|_{TM}$ на M . Тада по претпоставци имамо да она дефинише контактну структуру ξ на M . Притом имамо да важи $d\alpha|_{TM} = (d\iota_X \omega)|_{TM}$.

Из затворености форме ω и чињенице да је $\mathcal{L}_X \omega = \omega$ добијамо да је

$$d\iota_X \omega = (\iota_X d + d\iota_X)\omega = \mathcal{L}_X \omega = \omega.$$

ГЛАВА 5. КЛАСИФИКАЦИЈА ОДРЕЂЕНИХ ЛУЦОВИХ КОНТАКТНИХ СТРУКТУРА

Заједно са претходним добијамо да важи да је $\omega|_{\xi} = d\alpha|_{\xi}$, што је и требало доказати.

□

У димензији 3 важи следећи низ инклузија при чему је свака од њих строга:

$$\{\text{затегнуте структуре}\} \supsetneq \{\text{слабо попуњиве структуре}\} \supsetneq \{\text{јакو попуњиве структуре}\}.$$

Ељешберг и Громов су показали да је свака слабо попуњива контактна структура затегнута. Доказ ове чињенице је нетривијалан и може се пронаћи у [2].

5.2 Примери заврнутих и затегнутих Луцових структура

Важи следећа чињеница чији се доказ може пронаћи у [11]:

Став 5.2.1. Нека је $\pi : E \rightarrow M$ произвољно S^1 главно раслојење над површи M и нека је $\alpha \in \Omega^1(E)$ инваријантна контактна форма на E добијена из теореме 2.1.3. Тада је $(E, \ker \alpha)$ јакo попуњива.

Желимо још да покажемо да је инваријантна контактна структура на тривијалном S^1 —главном раслојењу заврнута кадгод њен сингуларни скуп Σ садржи кружницу контрактибилну у M .

Дефиниција 5.2.2. Нека је (E, ξ) контактна многострукост. За векторско поље $X \in \mathfrak{X}(E)$ кажемо да је *контактно* ако ток ρ^t овог векторског поља чува контактну структуру односно важи

$$\rho_*^t \xi = \xi.$$

Дефиниција 5.2.3. За површ $S \subseteq (E, \xi)$ у контактної 3—многострукости кажемо да је *конвексна* уколико постоји контактнo векторско поље $X \in \mathfrak{X}(E)$ које је трансверзално на њу.

ГЛАВА 5. КЛАСИФИКАЦИЈА ОДРЕЂЕНИХ ЛУЦОВИХ КОНТАКТНИХ СТРУКТУРА

Дефиниција 5.2.4. За скуп $\Gamma \subseteq S$ у конвексној површи S кажемо да је *геобни скуп конвексне површи* уколико важи

$$\Gamma = \{p \in S \mid X_p \in \xi_p\},$$

где је X контактнo векторско поље трансверзално на S .

У случају кооријентабилне контактне многострукости $(E, \ker \alpha)$ видимо да је геобни скуп заправо $\Gamma = \{p \in S \mid \alpha(X_p) = 0\}$. Јасно је да тада геобни скуп Γ дели површ S на $S^+ = \{p \in S \mid \alpha(X_p) > 0\}$ и $S^- = \{p \in S \mid \alpha(X_p) < 0\}$.

Став 5.2.5. Нека је дајо S^1 главно раслојење $\pi : E \rightarrow M$. Тада важи следеће:

1. За свако $\widetilde{M} \subseteq E$ такво да је $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ дифеоморфизам је $\widetilde{M}$ конвексна површ.
2. $\pi^{-1}(\Sigma) \cap \widetilde{M}$ је управо геобни скуп на $\widetilde{M}$.

Доказ. 1. Како је контактна форма α инваријантна у односу на S^1 дејство то одмах имамо да је векторско поље X придружено S^1 дејству контактнo векторско поље. Како је $\pi_* : T\widetilde{M} \rightarrow TM$ изоморфизам и у свакој тачки $p \in U$ постоји разлагање тангентног простора $T_p M \cong \ker_p \theta \oplus \mathcal{L}\{X_p\}$, то имамо да је векторско поље X трансверзално на $\widetilde{U}$.

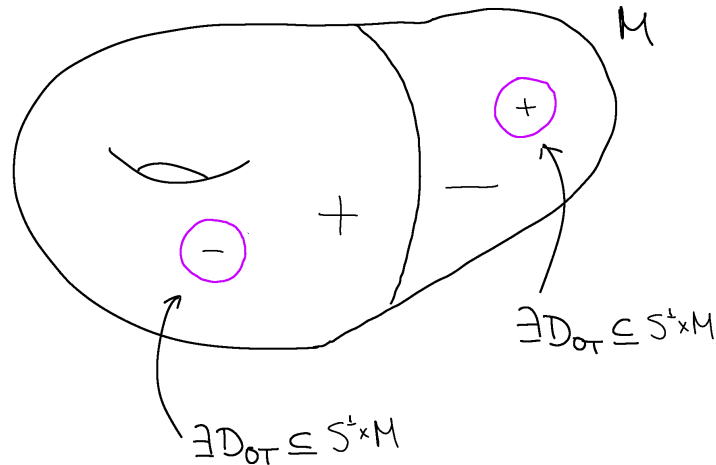
2. Ово следи директно на основу дефиниције скупа $\pi^{-1}(\Sigma)$.

□

Уочимо да кадгод горе поменути дифеоморфизам постоји, тада је раслојење $\pi : E \rightarrow M$ тривијално, с обзиром на то да имамо глатко сечење те је самим тим Ојлерова класа раслојења 0. Дакле важиће да је $E = S^1 \times M$.

Теорема 5.2.6 (Жиров критеријум затегнутости). Нека је $S \subseteq (E, \xi)$ конвексна површ таква да постоји кружница $\gamma \subseteq \Gamma$ која је контрактибилна у S . Тада свака околина од S садржи завртну диск, сем у случају када истовремено важи $M = S^2$ и Σ је повезан скуп.

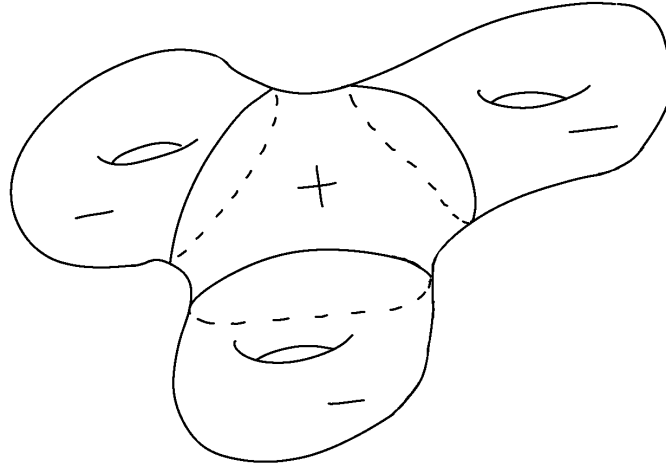
Дакле по претходној теореме имамо да уколико је раслојење $\pi : M \times S^1 \rightarrow M$ и површ $M \neq S^2$ садржи контрактибилну кружницу у себи, тада добијена контактна структура завртута. Уколико је $\pi : S^2 \times S^1 \rightarrow S^2$ тада важи да је добијена контактна структура завртута кадгод Σ садржи бар две кружнице.



Слика 5.3: Постојање заврнутих дискова D_{OT} у случају тривијалног раслојења $\pi : S^1 \times M \rightarrow M$ над површи M .

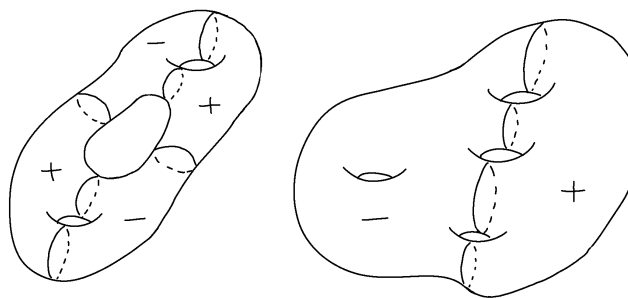
Чак и у случају тривијалних раслојења над површима, за велики избор сингуларног скупа кружница Σ , питање попуњивости Луцових контактних структура је отворено. Наредних пар примера преузимамо из рада [12] Нидеркругера и Вендла из 2011. године не би ли смо указали на односе између појмова затегнутости и слабе и јаке попуњивости у случајевима када базна површ не садржи контрактибилне кружнице.

Пример 20. Нека је $\pi : S^1 \times M \rightarrow M$ тривијално раслојење над површи рода 3. Инваријантна контактна форма са следећом конфигурацијом кружница у M ће бити затегнута, али неће бити слабо попуњива, те самим тим ни јако попуњива.



Слика 5.4: Пример конфигурације кружница за који добијамо контактну структуру која је затегнута, али није слабо попуњива.

Пример 21. Нека су $\pi : S^1 \times M \rightarrow M$ и $\pi : S^1 \times M' \rightarrow M'$ тривијална S^1 —главна раслојења над површима рода 3 и 4 редом. За следеће конфигурације кружница добијамо инваријантне контактне структуре које су слабо попуњиве, али не и јако попуњиве.



Слика 5.5: Конфигурације сингуларних кружница у површима рода 3 и 4 за које добијамо слабо, али не и јако попуњиве инваријантне контактне форме на тоталним просторима тривијалних S^1 —главних раслојења.

5.3 Отворена питања

За крај наводимо још пар отворених питања како бисмо указали на актуелност S^1 –инваријантних контактних структура на раслојењима над површима у склопу контактне геометрије и модерне математике.

1. Уколико је инваријантна контактна форма α коју Луц конструише у доказу теореме 2.0.1 заврнута, да ли увек у базној површи M постоји контрактибилна кружница $\Sigma_i \subseteq \Sigma$?
2. Да ли се Жируов критеријум затегнутости 5.2.6 може адаптирати на нетривијална S^1 –главна раслојења?
3. Које контактне структуре добијене конструкцијом из 2.0.1 су затегнуте, а које заврнуте?

Библиографија

- [1] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [2] Yakov Eliashberg and Mikhael Gromov. Convex symplectic manifolds. In Eric Bedford, John P. D'Angelo, Robert E. Greene, and Steven G. Krantz, editors, *Several Complex Variables and Complex Geometry, Part 2*, volume 52 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 135–162, Providence, RI, 1991. American Mathematical Society.
- [3] Hansjörg Geiges. Contact structures on 1-connected 5-manifolds. *Mathematika*, 38(2):303–311, 1991.
- [4] Hansjörg Geiges. *An Introduction to Contact Topology*, volume 109 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [5] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [6] Shoshichi Kobayashi. Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group. *Tôhoku Mathematical Journal, Second Series*, 8(1):29–45, 1956.
- [7] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [8] Robert Lutz. Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension trois. *Annales de l'Institut Fourier*, 27(3):1–15, 1977.
- [9] Jean Martinet. Formes de contact sur les variétés de dimension 3. In C. T. C. Wall, editor, *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II*, volume 209 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 142–163. Springer-Verlag, 1971.

- [10] John W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Revised reprint of the 1965 original; based on notes by David W. Weaver.
- [11] Klaus Niederkrüger and Federica Pasquotto. Resolution of symplectic cyclic orbifold singularities. *Journal of Symplectic Geometry*, 7(3):337–355, 2009.
- [12] Klaus Niederkrüger and Chris Wendl. Weak symplectic fillings and holomorphic curves. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 44(5):801–853, 2011.
- [13] Stephen Bruce Sontz. *Principal Bundles: The Classical Case*. Universitext. Springer, Cham, 2015.
- [14] R. E. Stong. Contact manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 9:219–238, 1974.